

Intelligente Systeme im WWW

PD Dr. Pascal Hitzler, Dr. Sebastian Rudolph, Dr. Raphael Volz
Sommersemester 2007

Übung 4: Logik (25.06.2007)

Logische Grundlagen

Wir stellen zum Thema Logik relativ viele Übungs- und Rechenaufgaben zur Verfügung. Diese können je nach Bedarf zur selbständigen Festigung der Logikkenntnisse verwendet werden. In der Übung werden nicht alle Teilaufgaben besprochen.

Hinweis zur nächsten Aufgabe: Eine Teilformel einer logischen Formel ist jeder Teilabschnitt der Formel, der selbst eine wohlgeformte logische Formel darstellt, wobei die vollständige Klammerung beachtet wird. Zum Beispiel sind die Teilformeln von $(q \rightarrow ((p \wedge q) \wedge r))$ genau die Formeln $(q \rightarrow ((p \wedge q) \wedge r))$, $((p \wedge q) \wedge r)$, $(p \wedge q)$, p , q , r . Dagegen ist z.B. $(q \wedge r)$ keine Teilformel (wegen der Klammerung). Um den Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel unter einer Interpretation \mathcal{I} zu berechnen, bestimmt man schrittweise die Werte für alle Teilformeln, wobei die Werte für die kleinsten Teilformeln (d.h. für einzelne Propositionen wie p oder q) direkt durch die Interpretation \mathcal{I} vorgegeben wird.

Aufgabe 4.1 Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln, ob diese allgemeingültig, erfüllbar, widerlegbar, oder unerfüllbar ist. Beweisen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe einer Wahrheitstafel, in der die Werte für jede Teilformel (und die gesamte Formel) jeweils in einer Spalte dargestellt werden.

Beispiel: Die Formel $(q \rightarrow (p \wedge q))$ ist erfüllbar und widerlegbar. Die entsprechende Wahrheitstafel ist: (wir schreiben hier $\mathcal{I}(\cdot)$, um darzustellen, dass die angegebenen Werte erst durch Anwendung einer bestimmten Interpretation \mathcal{I} festgelegt werden):

$\mathcal{I}(p)$	$\mathcal{I}(q)$	$\mathcal{I}((p \wedge q))$	$\mathcal{I}((q \rightarrow (p \wedge q)))$
t	t	t	t
t	f	f	t
f	t	f	f
f	f	f	t

- (a) $(p \vee \neg p)$
- (b) $((p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$
- (c) $\neg((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$

- (d) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- (e) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- (f) $((p \wedge \neg p) \rightarrow q)$

Aufgabe 4.2 Versuchen Sie die folgenden natürlichsprachlichen Sätze durch logische Formeln auszudrücken.

Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch.“

$$\leadsto ((\forall X)(\text{mensch}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X)) \wedge \text{mensch}(\text{sokrates}))$$

(Was würde die Formel bedeuten, wenn \wedge anstelle von \rightarrow verwendet würde?)

- (a) „Alle Wege führen nach Rom.“
- (b) „Wer die Prüfung besteht und nicht gelernt hat, der hatte großes Glück.“
- (c) „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine, die größer ist.“
- (d) „Es gibt keine natürliche Zahl, die größer als alle anderen ist.“
- (e) „Alle Amerikaner und Briten sprechen Englisch.“
- (f) „Ein Student kommt zu jeder Vorlesung.“

Aufgabe 4.3 Wandeln Sie die folgenden Formeln mit Hilfe der im Skript Logik I auf Folie 37 und Logik II auf Folie 13 dargestellten äquivalenten Umformungen in Negationsnormalform um. Bei solchen Umformungen ist es zulässig, beliebige *Teilformeln* durch äquivalente Formeln zu ersetzen.

- (a) *Geld allein macht nicht glücklich:*

$$\neg(\text{geld} \rightarrow \text{glücklich})$$

- (b) Die folgende Tautologie entspricht der bekannten Ableitungsregel *Modus Ponens*:

$$(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$$

- (c) Die semantische Äquivalenz der DeMorgan'schen Regeln lässt sich als Formel darstellen:

$$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$$

- (d) *Nicht alles was glitzert ist Gold, aber manches schon:*

$$(\neg(\forall X)(\text{glitzert}(X) \rightarrow \text{gold}(X)) \wedge (\exists Y)(\text{glitzert}(Y) \wedge \text{gold}(Y)))$$

(e) Auch diese Formel ist erfüllbar:

$$\neg((\forall X)(\exists Y)p(X, Y) \leftrightarrow (\exists Y)(\forall X)p(X, Y))$$

Aufgabe 4.4 Wandeln Sie die Negationsnormalformen der prädikatenlogischen Formeln (d) und (e) aus der vorigen Aufgabe in *Pränexnormalform* um (siehe Logik II, Folien 19/20) und bilden Sie anschließend jeweils eine *skolemisierte Pränexnormalform* (siehe Logik II, Folie 22/23).

Aufgabe 4.5 Wandeln Sie die Negationsnormalformen der Formeln (a) bis (c) aus Aufgabe 4.3 und die skolemisierten Pränexnormalformen aus Aufgabe 4.4 in *konjunktive Normalform (Klauselform)* um (siehe Logik II, Folie 25/26). Können Sie in den entstanden Formeln noch die ursprünglich beabsichtigten Aussagen wiederfinden?

Aufgabe 4.6 Beweisen Sie mit dem Resolutionsverfahren, dass die folgenden Mengen von Klauseln widersprüchlich sind.

(a) $(\neg p \vee q)$ Aus p folgt q und
 p p gilt,
 $\neg q$ aber q gilt nicht.

(b) $(\neg \text{hatBelag}(X, Y) \vee \text{Pizza}(X))$ Nur Pizzas haben Beläge,
 $(\neg \text{hatBelag}(Z, W) \vee \text{PizzaBelag}(W))$ nur Pizzabeläge kommen als Belag in Frage,
 $(\neg \text{Pizza}(V) \vee \neg \text{PizzaBelag}(V))$ nichts ist gleichzeitig Pizza und Pizzabelag, und
 $\text{PizzaBelag}(\text{aubergine})$ Aubergine und
 $\text{PizzaBelag}(\text{cheddar})$ Cheddar sind Pizzabeläge,
 $\text{hatBelag}(\text{aubergine}, \text{cheddar})$ aber die Aubergine wurde mit Cheddar belegt.

Aufgabe 4.7 Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit folgender Formeln mit dem Tableauverfahren. Eliminieren Sie dazu zunächst auftretende \rightarrow mit Hilfe der Äquivalenzen auf Folie 37 von Logik I.

(a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(b) $((\exists X)(\forall Y)p(X, Y) \rightarrow (\forall W)(\exists Z)p(Z, W))$

Aufgabe 4.8 Eine Menge von Sätzen einer Logik bezeichnet man auch als „Theorie“. Verdeutlichen Sie sich die Begriffe „logische Konsequenz“ und „logische (bzw. semantische) Äquivalenz“ (siehe Skript Logik I, Folien 11/12) und entscheiden Sie dann, ob folgende Behauptungen richtig sind. Geben Sie jeweils eine (informelle) Begründung für Ihre Antwort.

Für beliebige Theorien \mathcal{T} und \mathcal{S} gilt:

- (a) Ist eine Formel F allgemeingültig, dann gilt $\mathcal{T} \models F$, d.h. aus jeder Theorie folgen zumindest alle Tautologien.
- (b) Je größer eine logische Theorie ist, desto mehr Modelle hat sie. Das heißt, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, dann ist jedes Modell von \mathcal{T} auch ein Modell von \mathcal{S} .
- (c) Je größer eine Theorie ist, desto mehr logische Konsequenzen hat sie. Das heißt, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, dann ist jede logische Konsequenz aus \mathcal{T} auch eine Konsequenz aus \mathcal{S} .
- (d) Ist $\neg F \in \mathcal{T}$, dann kann $\mathcal{T} \models F$ niemals gelten (wobei F eine beliebige Formel ist).
- (e) Sind zwei Theorien unterschiedlich ($\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$), dann unterscheiden sie sich auch in wenigstens einer logischen Konsequenz (zum Beispiel, indem es eine Formel F gibt, so dass $\mathcal{T} \models F$ aber $\mathcal{S} \not\models F$).

Aufgabe 4.9 Auch über natürliche Zahlen können logische Aussagen ausgedrückt werden, indem man beispielsweise Zahlen mit Hilfe der Konstanten a (für die Zahl 0) und der Nachfolgerfunktion s darstellt. Zum Beispiel kodieren $s(a)$ und $s(s(s(a)))$ die Zahlen 1 und 3. Außerdem wird die Aussage „ $x + y = z$ “ mit der Formel $\text{add}(x, y, z)$ ausgedrückt.

- (a) Beweisen Sie mit einem Beweisverfahren Ihrer Wahl (Resolution oder Tableau), dass eins plus eins zwei ist, indem Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Formel zeigen:

$\left(\left((\forall X) \text{add}(a, X, X) \right) \wedge \left((\forall X)(\forall Y)(\forall Z) (\text{add}(X, Y, Z) \rightarrow \text{add}(s(X), Y, s(Z))) \right) \right) \rightarrow \text{add}(s(a), s(a), s(s(a)))$	<p style="text-align: center;"><i>„Aus den bekannten Eigenschaften der Addition“</i></p> $0 + x = x$ <p style="text-align: center;"><i>und</i></p> $(x + 1) + y = (x + y) + 1$ <p style="text-align: center;"><i>folgt</i></p> $1 + 1 = 2.$
---	---

Anmerkung: Das komplizierteste an dieser Aufgabe ist – wie so oft – eine geeignete Kodierung des Problems in formaler Logik zu finden. Die Formel kann dann ganz mechanisch bewiesen werden, und man kann leicht auch andere Rechenaufgaben lösen.

- (b) Die Darstellung von Zahlen in Prädikatenlogik hat enge Grenzen, weil wichtige Eigenschaften der natürlichen Zahlen nicht in dieser Logik ausgedrückt werden können. Zum Beispiel könnte man trotz der obigen vollständigen Definition von Addition noch nicht beweisen, dass Summanden beim Addieren vertauscht werden dürfen (Kommutativgesetz).

Beweisen Sie diese Behauptung, indem Sie ein Modell für die obige Formalisierung der Addition angeben (Vgl. dazu Logik II, Folie 11), unter dem die Formel

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(\text{add}(X, Y, Z) \leftrightarrow \text{add}(Y, X, Z))$$

auf f abgebildet wird.

Tipp: Diese Aufgabe ist schon ziemlich anspruchsvoll. Wenn man von der eigentlich beabsichtigten Interpretation mit natürlichen Zahlen abweicht, dann genügt aber schon ein Grundbereich mit nur zwei Elementen.