AIFB

Intelligente Systeme im WWW: Semantic Web

Sommersemester 2007

λogische Grundlagen

Dr. Sebastian Rudolph
rudolph@aifb.uni-karlsruhe.de
Institut AIFB, Universität Karlsruhe (TH)

AIFB

Inhalt der nächsten 4 Sitzungen

I. OWL – Syntax und allgemeines Verständnis
II. Logik (Wiederholung) – Teil II
III. OWL – Semantische Grundlagen
IV. Ontologiesprache F-Logik

AIFB

Inhalt

- Was ist Logik?
  Eine etwas andere Einführung
- Aussagenlogik
  Logik auf der Ebene der Propositionen
- Prädikatenlogik erster Stufe
  Logik auf der Ebene der Objekte

AIFB

Grenzen der Aussagenlogik

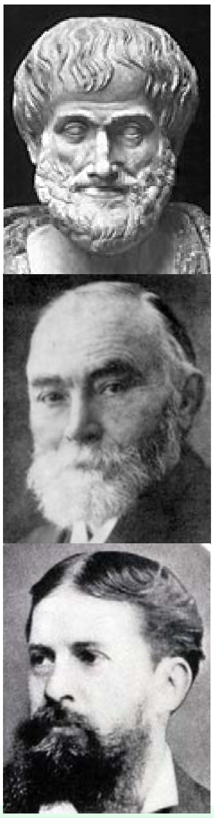
- Aussagenlogik behandelt nur ganze Aussagen als atomare Teile
- innere Struktur der Aussagen nicht beachtet
- man möchte z.B. auch über Objekte und ihre Beziehungen untereinander sprechen (und zwar „transparent“ für die Logik)

➔ Prädikatenlogik

Inhalt

- Was ist Logik?
  Eine etwas andere Einführung
- Aussagenlogik
  Logik auf der Ebene der Propositionen
- Prädikatenlogik erster Stufe
  Logik auf der Ebene der Objekte

Prädikatenlogik erster Stufe
auch: *first order* logic (FOL)



- erste Ansätze bei Aristoteles
  (Syllogismen, s. *Analytica Posteriora*)
- J. G. Frege (1848 – 1925):
  Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
- C. S. Peirce (1839 – 1914)
  (Einführung der heute gebräuchlichen Notation)

AIFB

Prädikatenlogik erster Stufe (FOL): Syntax: Sprachelemente

Quantor	*Name*	*Intuitive Bedeutung*
$\forall$	Allquantor, universeller Quantor	„für alle“
$\exists$	Existenzquantor	„es existiert“

- Junktoren wie in der Aussagenlogik
- Variablen, z.B. X,Y,Z,…
- Konstantensymbole, z.B. a, b, c, …
- Funktionssymbole, z.B. f, g, h, … (mit Stelligkeit)
- Relations-/Prädikatssymbole, z.B. p, q, r, … (mit Stelligkeit)

$$(\forall X)(\exists Y)\ ((p(X) \vee \neg q(f(X),Y)) \rightarrow r(X))$$

AIFB

FOL: Syntax

„richtiges“ Formen von *Termen* aus Variablen, Konstanten- und Funktionssymbolen:

f(X), g(a,f(Y)), s(a), .(H,T), x_location(Pixel)

„richtiges“ Formen von *Atomen* aus Relationssymbolen, deren Argumente Terme sind:

p(f(X)), q(s(a),g(a,f(Y))), add(a,s(a),s(a))
greater_than(x_location(Pixel),128)

„richtiges“ Formen von *Formeln* aus Atomen, Junktoren und Quantoren:

$(\forall$Pixel)(greater_than(x_location(Pixel),128) $\rightarrow$ red(Pixel))

Im Zweifelsfall klammern! Alle Variablen quantifizieren!

AIFB

FOL Syntax: Beispiel *Verwandtschaften*

$(\forall X)$ (parent(X) $\leftrightarrow$ (human(X) $\wedge$ $(\exists Y)$ parent_of(X,Y)))

$(\forall X)$ (human(X) $\rightarrow$ $(\exists Y)$ parent_of(Y,X))

$(\forall X)$ (orphan(X) $\leftrightarrow$ (human(X) $\wedge$
$\neg(\exists Y)$ (parent_of(Y,X)$\wedge$ alive(Y))))

$(\forall X)(\forall Z)(\exists Y)$
(uncle_of(X,Z) $\leftrightarrow$ (brother_of(X,Y) $\wedge$ parent_of(Y,Z)))

Intendierte Semantik: klar!

AIFB

FOL Syntax: Beispiel *Pinguin*

($(\forall X)$(penguin(X) $\rightarrow$ blackandwhite(X))
$\wedge$ $(\exists X)$(oldTVshow(X) $\wedge$ blackandwhite(X))
) $\rightarrow$ $(\exists X)$(penguin(X) $\wedge$ oldTVshow(X))

Intendierte Semantik?

Mit Hilfe der Logik können wir ganz formal zeigen, dass der Pinguin unlogisch ist.

AIFB

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

Struktur:

- Festlegung eines Grundbereichs D.
- Konstantensymbole werden auf Elemente von D abgebildet.
- Funktionssymbole auf Funktionen auf D.
- Relationssymbole auf Relationen über D.

Dann:

- Terme werden zu Elementen von D.
- Relationssymbole mit Argumenten werden wahr oder falsch.
- Entsprechende Behandlung der Junktoren/Quantoren.

AIFB

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik: Beispiel

$$
\begin{aligned}
F = (\quad & (\forall X)(\, penguin(X) \rightarrow blackandwhite(X)\,) \\
& \wedge (\exists X)(\, oldTVshow(X) \wedge blackandwhite(X)\,) \\
)\quad & \rightarrow (\exists X)(\, penguin(X) \wedge oldTVshow(X)\,)
\end{aligned}
$$

Interpretation I:

Grundbereich:

eine Menge M, die Elemente a,b,c enthält.

… keine Konstanten- oder Funktionssymbole …

Wir zeigen: Die Formel ist widerlegbar (d.h. sie ist nicht allgemeingültig:

Sind I(penguin)(a), I(blackandwhite)(a), I(oldTVshow)(b), I(blackandwhite)(b) wahr, I(oldTVshow)(a) jedoch falsch, dann ist die Formel unter I falsch, d.h. $I \not\models F$.

Mit Hilfe der Logik können wir ganz formal zeigen, dass der Pinguin unlogisch ist.

AIFB

Einige (zusätzliche) logische Äquivalenzen

$\neg(\forall X)\ F \equiv (\exists X)\ \neg F$

$\neg(\exists X)\ F \equiv (\forall X)\ \neg F$

$(\forall X)(\forall Y)\ F \equiv (\forall Y)(\forall X)\ F$

$(\exists X)(\exists Y)\ F \equiv (\exists Y)(\exists X)\ F$

$(\forall X)\ (F \wedge G) \equiv (\forall X)\ F \wedge (\forall X)\ G$

$(\exists X)\ (F \vee G) \equiv (\exists X)\ F \vee (\exists X)\ G$

falls X nicht in G vorkommt:

$((\forall X)\ F) \wedge G \equiv (\forall X)(F \wedge G)$

$((\exists X)\ F) \wedge G \equiv (\exists X)(F \wedge G)$

$((\forall X)\ F) \vee G \equiv (\forall X)(F \vee G)$

$((\exists X)\ F) \vee G \equiv (\exists X)(F \vee G)$

AIFB

Automatisches Schließen in FOL

- FOL ist nicht entscheidbar, aber semientscheidbar
- wir zeigen zwei mögliche Aufzählungsverfahren
- auch als Beweisverfahren verwendbar

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform.*

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
   alle Negationen stehen ganz innen
2. Pränexnormalform
   alle Quantoren stehen ganz vorn
3. Skolemisierte Pränexnormalform
   Eliminierung der Existenzquantoren
4. konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform
   Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

© Sebastian Rudolph 2007

Normalformen: 1. Negationsnormalform

Alle Negationszeichen nach innen ziehen
durch Verwendung der folgenden Äquivalenzen:

$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F)$

$F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G$

$\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$

$\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$

$\neg(\forall X)\, F \equiv (\exists X)\, \neg F$

$\neg(\exists X)\, F \equiv (\forall X)\, \neg F$

$\neg\neg F \equiv F$

Ergebnis:

- Keine $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mehr.
- Keine mehrfachen Negationen mehr.
- Alle Negationszeichen stehen direkt vor Atomen.

AIFB

Normalformen: 1. Negationsnormalform

Beispiel

$($ $(\forall X)($ penguin$(X) \rightarrow$ blackandwhite(X) $)$
$\wedge$ $(\exists X)($ oldTVshow$(X) \wedge$ blackandwhite(X) $)$
$)$ $\rightarrow (\exists X)($ penguin$(X) \wedge$ oldTVshow(X) $)$

wird zu

$\neg($ $(\forall X)($ $\neg$penguin$(X) \vee$ blackandwhite(X) $)$
$\wedge$ $(\exists X)($ oldTVshow$(X) \wedge$ blackandwhite(X) $)$
$) \vee (\exists X)($ penguin$(X) \wedge$ oldTVshow(X) $)$

und dann zu

$($ $(\exists X)($ penguin$(X) \wedge \neg$blackandwhite(X) $)$
$\vee$ $(\forall X)(\neg$oldTVshow$(X) \vee \neg$blackandwhite(X) $)$
$) \vee (\exists X)($ penguin$(X) \wedge$ oldTVshow(X) $)$

AIFB

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform.*

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
   alle Negationen stehen ganz innen
2. **Pränexnormalform**
   alle Quantoren stehen ganz vorn
3. Skolemisierte Pränexnormalform
   Eliminierung der Existenzquantoren
4. konkunktive Normalform (CNF) = Klauselform
   Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

AIFB

Normalformen: 2. Pränexnormalform

Erst Formel bereinigen
(Quantoren binden verschiedene Variablen).

$$
\begin{aligned}
(\quad & (\exists X)(\ penguin(X) \wedge \neg blackandwhite(X)\ ) \\
& \vee (\forall X)(\ \neg oldTVshow(X) \vee \neg blackandwhite(X)\ ) \\
) \vee & (\exists X)(\ penguin(X) \wedge oldTVshow(X)\ )
\end{aligned}
$$

wird zu

$$
\begin{aligned}
(\quad & (\exists X)(\ penguin(X) \wedge \neg blackandwhite(X)\ ) \\
& \vee (\forall Y)(\ \neg oldTVshow(Y) \vee \neg blackandwhite(Y)\ ) \\
) \vee & (\exists Z)(\ penguin(Z) \wedge oldTVshow(Z)\ )
\end{aligned}
$$

© Sebastian Rudolph 2007

AIFB

Normalformen: 2. Pränexnormalform

Dann aus der Negationsnormalform einfach alle Quantoren in derselben Reihenfolge nach vorne ziehen.

$$
\begin{aligned}
(\quad & (\exists X)(\ penguin(X) \wedge \neg blackandwhite(X)\ ) \\
& \vee (\forall Y)(\ \neg oldTVshow(Y) \vee \neg blackandwhite(Y)\ ) \\
) \vee & (\exists Z)(\ penguin(Z) \wedge oldTVshow(Z)\ )
\end{aligned}
$$

wird zu

$$
\begin{aligned}
& (\exists X)(\forall Y)(\exists Z)(\ \ (\ penguin(X) \wedge \neg blackandwhite(X)\ ) \\
& \quad \vee (\ \neg oldTVshow(Y) \vee \neg blackandwhite(Y)\ )\ \ ) \\
& \quad \vee (\ penguin(Z) \wedge oldTVshow(Z)\ )
\end{aligned}
$$

AIFB

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform.*

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
   alle Negationen stehen ganz innen
2. Pränexnormalform
   alle Quantoren stehen ganz vorn
3. **Skolemisierte Pränexnormalform**
   Eliminierung der Existenzquantoren
4. konkunktive Normalform (CNF) = Klauselform
   Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

AIFB

Normalformen: 3. Skolemisierung

“Existenzquantoren entfernen”

(∃X)(∀Y)(∃Z)((penguin(X) ∧ ¬blackandwhite(X))
 ∨ (¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)))
 ∨ (penguin(Z) ∧ oldTVshow(Z))

wird zu …

(∀Y)((penguin(a) ∧ ¬blackandwhite(a))
 ∨ (¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)))
 ∨ (penguin(f(Y)) ∧ oldTVshow(f(Y)))

wobei a und f *neue* Symbole sind
 (sog. *Skolemkonstanten* bzw. *-funktionen*).

Normalformen: 3. Skolemisierung

Vorgehensweise:

- Entfernen der Existenzquantoren von links nach rechts.
- Gibt es keinen Allquantor links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein neues Konstantensymbol ersetzt.
- Gibt es *n* Allquantoren links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein neues Funktionssymbol mit Stelligkeit *n* ersetzt, dessen Argumente genau die Variablen der *n* Allquantoren sind.

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform.*

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
   alle Negationen stehen ganz innen
2. Pränexnormalform
   alle Quantoren stehen ganz vorn
3. Skolemisierte Pränexnormalform
   Eliminierung der Existenzquantoren
4. **konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform**
   Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

AIFB

Normalformen: 4. Klauselform

Es gibt nur noch Allquantoren, also lassen wir sie weg:

(penguin(a) ∧ ¬blackandwhite(a))
∨ (¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)))
∨ (penguin(f(Y)) ∧ oldTVshow(f(Y))

Mit Hilfe semantischer Äquivalenzen wird die Formel nun als Konjunktion von Disjunktionen geschrieben.

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$
$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

AIFB

Normalformen: 4. Klauselform

((penguin(a) ∧ ¬blackandwhite(a))
∨ (¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)))
∨ (penguin(f(Y)) ∧ oldTVshow(f(Y))

wird zu …

((penguin(a) ∨ ¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y))
∧ (¬blackandwhite(a) ∨ ¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y))
∨ (penguin(f(Y)) ∧ oldTVshow(f(Y))

wird zu …

(penguin(a) ∨ ¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y) ∨ penguin(f(Y)))
∧ (penguin(a) ∨ ¬oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)
∨ oldTVshow(f(Y)))
∧ (¬blackandwhite(a) ∨ oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)
∨ penguin(f(Y)))
∧ (¬blackandwhite(a) ∨ oldTVshow(Y) ∨ ¬blackandwhite(Y)
∨ oldTVshow(f(Y)))

Besser lesbar?

Für Maschinen schon!

Normalformen: Eigenschaften

Idee: Rückführung des Schließens auf die Suche nach Widersprüchen.

Sei F eine Formel,
G die Pränexnormalform von F,
H die skolemisierte Pränexnormalform von G,
K die Klauselform von H.

Dann ist $F \equiv G$ und $H \equiv K$ aber i.A. $F \not\equiv K$.

Es gilt jedoch:

F ist unerfüllbar genau dann, wenn K unerfüllbar ist.

(Grundlage des Resolutionsverfahrens)

Skolemisierung ist keine Äquivalenztransformation

Die Formel $(\exists x)p(x) \lor \neg(\exists x)p(x)$ ist eine Tautologie.

- Negationsnormalform: $(\exists x)p(x) \lor (\forall y)\neg p(y)$
- Pränexnormalform: $(\exists x)(\forall y)(p(x) \lor \neg p(y))$
- Skolemnormalform: $(\forall y)(p(a) \lor \neg p(y))$
- Äquivalent dazu: $p(a) \lor \neg(\exists y)p(y)$

Die resultierende Formel ist keine Tautologie!

z.B. Interpretation I mit

$I(p(a))=f$

$I(p(b))=w$

AIFB

Beweisverfahren für FOL

- Resolution
- Tableau

AIFB

Automatisierung: Resolution – Vorbereitungen

Diese Aussagen sind äquivalent!

Theorie

- $\{F_1,\ldots,F_n\}$ hat F_0 als logische Konsequenz
- $\{F_1,\ldots,F_n\} \models F_0$
- $F_1 \land \ldots \land F_n \to F_0$ ist allgemeingültig
- $\underbrace{\neg(F_1 \land \ldots \land F_n \to F_0)}$ ist unerfüllbar

Transformation in Klauselform

- $G_1 \land \ldots \land G_k$ ist unerfüllbar
- Das Resolutionsverfahren erlaubt die Ableitung eines Widerspruchs aus $G_1 \land \ldots \land G_k$.

AIFB

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

Ist

$(p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \mathbf{p} \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l) \land (r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg \mathbf{p} \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n)$

wahr, dann:

Eins von **p**, **¬p** muss falsch sein. Also:

Eins der anderen muss wahr sein. D.h.

$p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l \lor r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n$

muss wahr sein.

Ergo: Ist $p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l \lor r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n$

unerfüllbar, dann auch

$(p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \mathbf{p} \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l) \land (r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg \mathbf{p} \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n)$

AIFB

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

$\underbrace{(p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \mathbf{p} \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l)}_{K_1} \quad \underbrace{(r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg \mathbf{p} \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n)}_{K_2}$

Resolutionsschritt

$\{K_1, K_2\} \models K_3$

$\underbrace{p_1 \lor \ldots \lor p_k \lor \neg q_1 \lor \ldots \lor \neg q_l \lor r_1 \lor \ldots \lor r_m \lor \neg s_1 \lor \ldots \lor \neg s_n}_{K_3}$

Aus zwei Klauseln wird eine neue.

Werden Klauseln resolviert, die nur noch aus je einem Atom bzw. negierten Atom bestehen, dann entsteht eine „leere Klausel“, bezeichnet mit $\perp$.

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

Vorgehensweise, um einen Widerspruch aus einer Menge M von Klauseln abzuleiten:

1. Wähle zwei Klauseln aus M und erzeuge aus ihnen eine neue Klausel K durch einen Resolutionsschritt.
2. Ist $K=\bot$, dann ist ein Widerspruch gefunden.
3. Falls $K\neq\bot$, füge K zur Menge M hinzu und gehe zu 1.

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik)

In der Prädikatenlogik müssen bei der Resolution zusätzlich Variablenbindungen mit Hilfe von Substitutionen berücksichtigt werden.

Z.B. $(p(X,f(Y)) \lor q(f(X),Y))$ $\qquad$ $(\neg p(a,Z) \lor r(Z))$

Resolution mit [X/a, Z/f(Y)] ergibt

$(q(f(a),Y) \lor r(f(Y)))$.

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Terminologisches Wissen (DL: *TBox*):

$(\forall X)$ (human(X) $\rightarrow$ $(\exists Y)$ parent_of(Y,X))

$(\forall X)$ (orphan(X) $\leftrightarrow$

(human(X) $\wedge$ $\neg(\exists Y)$ (parent_of(Y,X) $\wedge$ alive(Y)))

Wissen um Individuen (DL: *ABox*):

orphan(harrypotter)

parent_of(jamespotter,harrypotter)

Können wir folgern: $\neg$alive(jamespotter)?

(DL = Beschreibungslogik (Description Logic))

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Zu zeigen:

(($\forall X$) (human(X) $\rightarrow$ $(\exists Y)$ parent_of(Y,X))

$\wedge$ $(\forall X)$ (orphan(X) $\leftrightarrow$

(human(X) $\wedge$ $\neg(\exists Y)$ (parent_of(Y,X) $\wedge$ alive(Y)))

$\wedge$ orphan(harrypotter)

$\wedge$ parent_of(jamespotter,harrypotter)

) $\rightarrow$ $\neg$alive(jamespotter))

ist allgemeingültig.

AIFB

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Zu zeigen:

$\neg((\forall X)\ (\ human(X) \rightarrow (\exists Y)\ parent\_of(Y,X)\ )$

$\wedge\ (\forall X)\ (orphan(X) \leftrightarrow$

$\quad (human(X) \wedge \neg(\exists Y)\ (parent\_of(Y,X) \wedge alive(Y)))$

$\wedge\ orphan(harrypotter)$

$\wedge\ parent\_of(jamespotter,harrypotter)$

$)\ \rightarrow \neg alive(jamespotter))$

ist unerfüllbar.

AIFB

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Pränexnormalform:

$(\forall X)(\exists Y)(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\exists Y_2)$

$((\ \neg human(X) \vee parent\_of(Y,X)\ )$

$\wedge\ (\neg orphan(X_1)$

$\quad \vee\ (human(X_1) \wedge (\neg parent\_of(Y_1,X_1) \vee \neg alive(Y_1)))$

$\wedge\ (orphan(X_2)$

$\quad \vee\ (\neg human(X_2) \vee (parent\_of(Y_2,X_2) \wedge alive(Y_2)))$

$\wedge\ orphan(harrypotter)$

$\wedge\ parent\_of(jamespotter,harrypotter))$

$\wedge\ alive(jamespotter))$

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

AIFB

Klauselform:

$(\neg human(X) \lor parent\_of(f(X),X))$

$\land (\neg orphan(X_1) \lor human(X_1))$

$\land (\neg orphan(X_1) \lor \neg parent\_of(Y_1,X_1) \lor \neg alive(Y_1))$

$\land (orphan(X_2) \lor \neg human(X_2) \lor$
$parent\_of(g(X,X_1,Y_1,X_2),X_2))$

$\land (orphan(X_2) \lor \neg human(X_2) \lor alive(g(X,X_1,Y_1,X_2)))$

$\land$ orphan(harrypotter)

$\land$ parent_of(jamespotter,harrypotter))

$\land$ alive(jamespotter)

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

AIFB

Wissen:

1. $(\neg human(X) \lor parent\_of(f(X),X))$
2. $(\neg orphan(X_1) \lor human(X_1))$
3. $(\neg orphan(X_1) \lor \neg parent\_of(Y_1,X_1) \lor$ $\neg alive(Y_1))$
4. $(orphan(X_2) \lor \neg human(X_2) \lor$ $parent\_of(g(X,X_1,Y_1,X_2),X_2))$
5. $(orphan(X_2) \lor \neg human(X_2) \lor$ $alive(g(X,X_1,Y_1,X_2)))$
6. orphan(harrypotter)
7. parent_of(jamespotter,harrypotter))
8. alive(jamespotter)

Abgeleitete Klauseln:

9. ¬orphan(harrypotter) ∨ ¬alive(jamespotter) (3,7)
10. ¬orphan(harrypotter) (8,9)
11. $\perp$ (6,10)

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik)

Ein technisches Detail:

Damit das prädikatenlogische Resolutionsverfahren vollständig ist, wird neben der Resolutionsregel noch eine Faktorisierungsregel benötigt. Sie besagt:

Einthält eine Klausel K zwei Literale L_1 und L_2, die unifizierbar mit σ=mgu(L_1, L_2) sind, dann kann $K\sigma$ abgeleitet werden.

Automatisierung: SLD-Resolution (Prädikatenlogik): pures Prolog

- Implementierung der prädikatenlogischen Resolution.
- Einschränkung: Klauseln dürfen nur je ein nichtnegiertes Atom enthalten.
  Dadurch schnelleres Verfahren: SLD-Resolution.
  (Terminiert aber nicht immer.)
- Darstellung: $(p \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_n)$ als $p \leftarrow q_1,\ldots,q_n$.
- “Aufsammeln” der Substitutionen beim Resolvieren zur Fragebeantwortung.

AIFB

Automatisierung: Tableauverfahren (Prädikatenlogik)

Vorgehensweise:

- Zeige Allgemeingültigkeit von Formel F.
- Keine Umwandlung in Normalform nötig.
  (hier: nur Elimination von $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$)
- Negation der Formel: $\neg F$
- Konstruiere Tableau für $\neg F$.
  Kann das Tableau *abgeschlossen* werden, dann ist F allgemeingültig.

AIFB

Tableauverfahren: Vorgehensweise

- schreibe $\neg F$ ins Tableau
- bis das Tableau abgeschlossen ist tue folgendes
  – wähle eine Formel in einem nicht abgeschlossenen Zweig
  – füge nach den Regeln auf der nächsten Folie Formeln zum Tableau hinzu

Kann das Tableau abgeschlossen werden, so ist $\neg F$ unerfüllbar d.h. F allgemeingültig.

AIFB

Regeln für Tableauerstellung:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \qquad \frac{F_1 \wedge F_2}{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}} \qquad \frac{F_1 \vee F_2}{F_1 | F_2} \qquad \frac{\neg(F_1 \vee F_2)}{\begin{matrix} \neg F_1 \\ \neg F_2 \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(F_1 \wedge F_2)}{\neg F_1 | \neg F_2}$$

$$\frac{(\forall X)F}{F\{X \mapsto Y\}} \qquad \frac{\neg(\exists X)F}{\neg F\{X \mapsto Y\}}$$

mit Y unbenutzter Variable

$$\frac{(\exists X)F}{F\{X \mapsto f(X_1, \ldots, X_n)\}} \qquad \frac{\neg(\forall X)F}{\neg F\{X \mapsto f(X_1, \ldots, X_n)\}}$$

mit f als neuem Skolemfunktionszeichen und $X_1, \ldots, X_n$ als alle in F frei vorkommenden Variablen

AIFB

Anwendung der Tableauregeln

- Die Regeln für Disjunktion ($F_1 \vee F_2$) und für negierte Konjunktion ($\neg(F_1 \wedge F_2)$) *teilen* das Tableau in zwei Zweige, wie im nachfolgenden Beispiel.
- Ein Zweig ist abgeschlossen, wenn in ihm eine Formel F und deren Negation ¬F vorkommt.
- Ein Tableau ist abgeschlossen, wenn es eine Belegung seiner freien Variablen mit Termen gibt, so dass alle seine Zweige abgeschlossen sind.

Automatisierung: Tableaus (Prädikatenlogik) – Beispiel

$\neg(\neg((\forall X)\ (\neg orphan(X) \lor$
$\quad (human(X) \land \neg(\exists Y)\ (parent\_of(Y,X) \land alive(Y))))$
$\land\ orphan(harrypotter)$
$\land\ parent\_of(jamespotter,harrypotter)$
$)\ \lor \neg alive(jamespotter))$

Kürzer:

$\neg(\neg(\quad (\forall X)\ (o(X) \rightarrow (h(X) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,X) \land al(Y))))$
$\quad \land\ o(harry) \land pof(james,harry))$
$\quad \lor \neg al(james))$

Beispieltableau auf nächster Folie!

- $\neg(\neg(\quad (\forall X)\ (\neg o(X) \lor (h(X) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,X) \land al(Y))))$
  $\land\ o(harry) \land pof(james,harry)) \quad \lor \neg al(james))$
- $\neg\neg(\ (\forall X)\ (\neg o(X) \lor (h(X) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,X) \land al(Y))))$
  $\land\ o(harry) \land pof(james,harry))$
- $\neg\neg al(james)$
- $(\forall X)\ (\neg o(X) \lor (h(X) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,X) \land al(Y))))$
  $\land\ o(harry) \land pof(james,harry)$
- $al(james)$
- $(\forall X)\ (\neg o(X) \lor (h(X) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,X) \land al(Y))))$
- $o(harry)$
- $pof(james,harry)$
- $\neg o(Z) \lor (h(Z) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,Z) \land al(Y)))$ (Disjunktion! Teile Tableau!)

• $\neg o(Z)$ mit [Z/harry]	• $h(Z) \land \neg(\exists Y)\ (pof(Y,Z) \land al(Y)))$ • $h(Z)$ • $\neg(\exists Y)\ (pof(Y,Z) \land al(Y)))$ • $\neg(pof(W,Z) \land al(W))$

• $\neg pof(W,Z)$ mit [W/james]	• $\neg al(W)$

AIFB

Eigenschaften der Prädikatenlogik

- Monotonie
  Bei Vergrößerung des Wissens gehen keine Schlussfolgerungen verloren.
- Kompaktheit
  Für jede Schlußfolgerung aus einer Theorie genügt eine endliche Teilmenge der Theorie.
- Semientscheidbarkeit
  Alle *wahren* Schlüsse lassen sich finden, wenn man lange genug sucht.

AIFB

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Alle genannten Eigenschaften der Prädikatenlogik.
- Entscheidbarkeit
  Alle *wahren* Schlüsse lassen sich finden, und alle *falschen* Schlüsse lassen sich widerlegen, wenn man lange genug sucht.
  D.h. es gibt *immer terminierende* automatische Beweiser.

AIFB

Wichtige Fragmente von FOL

- Aussagenlogik
- Datalog (Wie pures/reines Prolog, aber ohne Funktionssymbole)
  entscheidbar
- Disjunktives Datalog (Klauseln ohne Funktionssymbole)
  entscheidbar
- Hornklauseln (pures/reines Prolog)
  seminentscheidbar
- Beschreibungslogiken
  entscheidbar (manche)

z.B. OWL → nächster Teil der Vorlesung

AIFB

Inhalt der nächsten 3 Sitzungen

I. OWL – Syntax und allgemeines Verständnis

II. Logik (Wiederholung)

  a. Syntax

  b. Semantik

  c. Beweistheorie

III. OWL – Semantische Grundlagen

  a. Beschreibungslogiken

  b. Beweistheorie

IV. Ontologiesprache F-Logik