Übung zur Lehrveranstaltung

Intelligente Systeme im WWW

Dr. Pascal Hitzler, Dr. York Sure, Markus Krötzsch, Daniel Politze

Sommersemester 2005

Übung 2: RDF und Logik, Lösungen 2.4 / 2.5 / 2.6

Aufgabe 2.4 Wandeln Sie die folgenden Formeln mit Hilfe der im Skript auf Folie 35 dargestellten äquivalenten Umformungen in Negationsnormalform um. Bei solchen Umformungen ist es zulässig, beliebige *Teil*formeln durch äquivalente Formeln zu ersetzen.

(a) *Geld allein macht nicht glücklich:*

$$\begin{aligned} & \neg(\mathsf{geld} \rightarrow \mathsf{glücklich}) \\ \equiv\ & (\mathsf{geld} \land \neg\mathsf{glücklich}) \end{aligned}$$

(b) Die folgende Tautologie entspricht der bekannten Ableitungsregel *Modus Ponens*:

$$\begin{aligned} & (((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q) \\ \equiv\ & \big(((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor q\big) \end{aligned}$$

(c) Die semantische Äquivalenz der DeMorgan'schen Regeln lässt sich als Formel darstellen:

$$\begin{aligned} & (\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)) \\ \equiv\ & \big(((p \land q) \lor (\neg p \lor \neg q)) \land ((\neg p \lor \neg q) \lor (p \land q))\big) \end{aligned}$$

(d) *Nicht alles was glitzert ist Gold, aber manches schon:*

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall X)(\mathsf{glitzert}(X) \rightarrow \mathsf{gold}(X)) \land (\exists Y)(\mathsf{glitzert}(Y) \land \mathsf{gold}(Y))) \\ \equiv\ & \big((\exists X)(\mathsf{glitzert}(X) \land \neg\mathsf{gold}(X)) \land (\exists Y)(\mathsf{glitzert}(Y) \land \mathsf{gold}(Y))\big) \end{aligned}$$

(e) Auch diese Formel ist erfüllbar:

$$\begin{aligned} & \neg((\forall X)(\exists Y)p(X,Y) \leftrightarrow (\exists Y)(\forall X)p(X,Y)) \\ \equiv\ & \big(((\forall X)(\exists Y)p(X,Y) \land (\forall Y)(\exists X)\neg p(X,Y)) \lor ((\exists X)(\forall Y)\neg p(X,Y) \land (\exists Y)(\forall X)p(X,Y))\big) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5 Wandeln Sie die Negationsnormalformen der prädikatenlogischen Formeln (d) und (e) aus der vorigen Aufgabe in *Pränexnormalform* um (siehe Folie 38) und bilden Sie anschließend jeweils eine *skolemisierte Pränexnormalform* (siehe Folie 41).

(d) Pränexnormalform: $(\exists X)(\exists Y)\big((\mathsf{glitzert}(X) \land \neg\mathsf{gold}(X)) \land (\mathsf{glitzert}(Y) \land \mathsf{gold}(Y))\big)$

Skolemisierte PNF: $\big((\mathsf{glitzert}(a) \land \neg\mathsf{gold}(a)) \land (\mathsf{glitzert}(b) \land \mathsf{gold}(b))\big)$

(e) Pränexnormalform: $(\exists X_3)(\exists Y_4)(\forall X_1)(\exists Y_1)(\forall Y_2)(\exists X_2)(\forall Y_3)(\forall X_4)$
$$\big((p(X_1, Y_1) \land \neg p(X_2, Y_2)) \lor (\neg p(X_3, Y_3) \land p(X_4, Y_4))\big)$$

Skolemisierte PNF: $(\forall X_1)(\forall Y_2)(\forall Y_3)(\forall X_4)$
$$\big((p(X_1, f(X_1)) \land \neg p(g(X_1, Y_2), Y_2)) \lor (\neg p(a, Y_3) \land p(X_4, b))\big)$$

Hier haben wir uns zunutze gemacht, dass man zur Erzeugung einer Pränexnormalform die Quantoren in beliebiger Reihenfolge nach vorne bewegen darf, solange man die Reihenfolge hintereinander geschachtelt vorkommender Quantoren bewahrt. Auf diese Weise kann man Existenzquantoren möglichst weit nach vorne bewegen. Bei der Skolemisierung müssen nur Variablen von Allquantoren vor *dem gerade eliminierten Existenzquantor in die Skolemfunktion eingesetzt werden, so dass diese Taktik zu kürzeren Formeln führt.*

Aufgabe 2.6 Wandeln Sie die Negationsnormalformen der Formeln (a) bis (c) aus Aufgabe 2.4 und die skolemisierten Pränexnormalformen aus Aufgabe 2.5 in *konjunktive Normalform* (*Klauselform*) um (siehe Folie 44). Können Sie in den entstanden Formeln noch die ursprünglich beabsichtigten Aussagen wiederfinden?

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird lediglich eines der beiden wohlbekannten Distributivgesetze der Logik benötigt:
$$(F \lor (G \land H)) \equiv ((F \lor G) \land (F \lor H))$$
Auf diese Art können Konjunktionen nach außen bewegt werden um die konjunktive Normalform zu erzeugen. Im Sinne der besseren Lesbarkeit werden Klammern in aufeinanderfolgenden Konjunktionen oder Disjunktionen weggelassen.

(a) $(\mathsf{geld} \land \neg \mathsf{glücklich})$

(b)
$$\begin{aligned} & \big(((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor q\big) \\ \equiv\ & \big(((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor q\big) \\ \equiv\ & (p \lor \neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg p \lor q) \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} & \big(((p \land q) \lor (\neg p \lor \neg q)) \land ((\neg p \lor \neg q) \lor (p \land q))\big) \\ \equiv\ & (p \lor \neg p \lor \neg q) \land (q \lor \neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor \neg q \lor p) \land (\neg p \lor \neg q \lor q) \end{aligned}$$

(d) $\mathsf{glitzert}(a) \land \neg \mathsf{gold}(a) \land \mathsf{glitzert}(b) \land \mathsf{gold}(b)$

(e)
$$\begin{aligned} & (\forall X_1)(\forall Y_2)(\forall Y_3)(\forall X_4)\big((p(X_1, f(X_1)) \land \neg p(g(X_1, Y_2), Y_2)) \lor (\neg p(a, Y_3) \land p(X_4, b))\big) \\ \rightsquigarrow\ & \big((p(X_1, f(X_1)) \land \neg p(g(X_1, Y_2), Y_2)) \lor (\neg p(a, Y_3) \land p(X_4, b))\big) \\ \equiv\ & \big(((p(X_1, f(X_1)) \land \neg p(g(X_1, Y_2), Y_2)) \lor \neg p(a, Y_3)) \land \\ & ((p(X_1, f(X_1)) \land \neg p(g(X_1, Y_2), Y_2)) \lor p(X_4, b))\big) \\ \equiv\ & \big(p(X_1, f(X_1)) \lor \neg p(a, Y_3)\big) \land \big(\neg p(g(X_1, Y_2), Y_2) \lor \neg p(a, Y_3)\big) \land \\ & \big(p(X_1, f(X_1)) \lor p(X_4, b)\big) \land \big(\neg p(g(X_1, Y_2), Y_2) \lor p(X_4, b)\big) \end{aligned}$$