

Intelligente Systeme im World Wide Web

Logische Grundlagen

Folien zur Vorlesung im Sommersemester 2005
Pascal Hitzler & York Sure
Institut für Angewandte Informatik und Formale
Beschreibungsverfahren (AIFB)
Universität Karlsruhe (TH)

„Logic is the Calculus of Computer Science“

in etwa

„Die zentrale Rolle der Logik in der Informatik
ist vergleichbar mit der Rolle der Differential- und
Integralrechnung in den Naturwissenschaften.“

Anwendungen

Calculus

Physik
Ingenieurwissenschaften
Chemie
Biologie
Via Statistik auch in
Sozialwissenschaften
Medizin
Etc.

Logik

Wissensrepräsentation
Automatisches Beweisen
Kognitive Robotik
Programmverifikation
Programmierung
Datenbanken
Elektronik
Komplexitätstheorie
Etc.

Supported by

- European Network of Excellence for Computational Logic (CoLogNET)
- Erasmus Mundus (EU)
- German Academic Exchange Service (DAAD)

Double Degree Between any
two participating universities

Start Each winter term

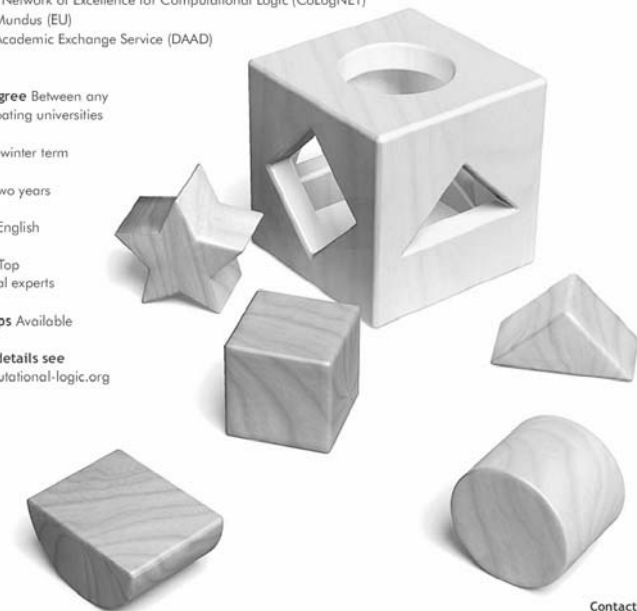
Duration Two years

Language English

Lecturers Top
international experts

Scholarships Available

For more details see
www.computational-logic.org



Participating Universities

- Libera Università di Bolzano, Italy

“Logic is everywhere ...”

Contact

Prof. Steffen Hölzl
International Center for
Computational Logic

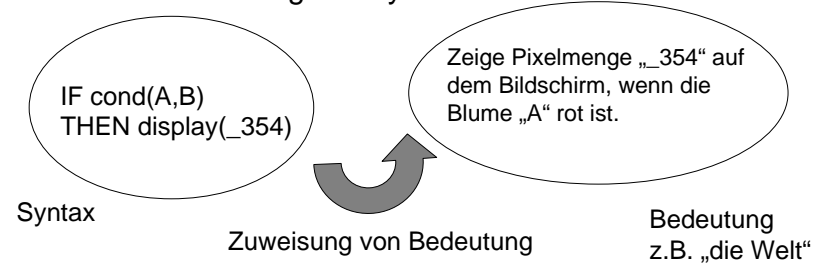
Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. Modelltheoretische Semantik
4. Beweistheoretische Semantik
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren
5. Eigenschaften der Logiken

Syntax und Semantik

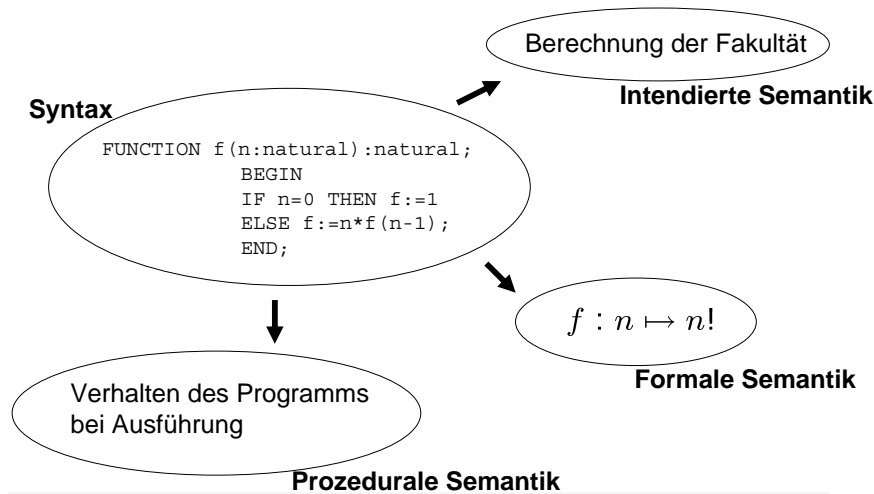
Syntax: Bedeutungsleere Zeichenfolgen

Semantik: Bedeutung der Syntax

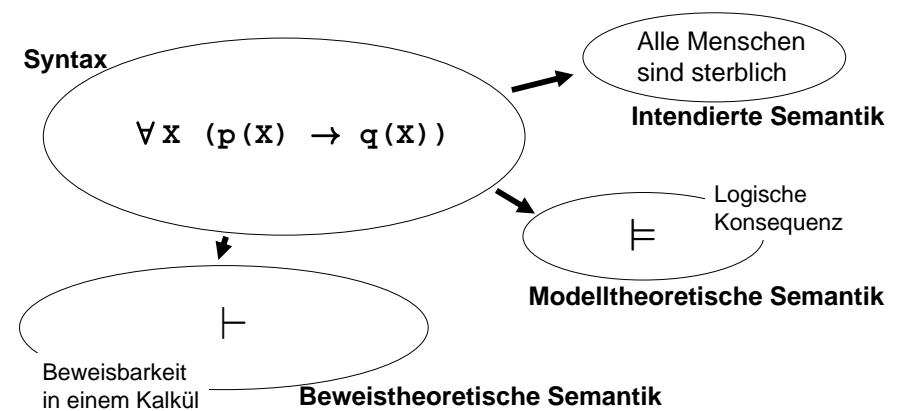


Erfolgsbasis für Logik in der Informatik:
Semantik lässt sich auf Syntax zurückführen!

Was ist Semantik? Beispiel Programmiersprache



Semantik von Logik/Wissensrepräsentationssprachen



Abstraktere Formen der Semantik

Spieltheoretisch
 Argumentationsbasiert
 Algebraisch
 Kategorientheoretisch
 Geometrisch
 Automatentheoretisch
 Denotational
 Fixpunktsemantik
 ...

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. **Syntax Aussagenlogik + FOL**
3. Modelltheoretische Semantik
4. Beweistheoretische Semantik
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren
5. Eigenschaften der Logiken

Aussagenlogik: Syntax

<i>Junktor</i>	<i>Name</i>	<i>Intuitive Bedeutung</i>
\neg	Negation	„nicht“
\wedge	Konjunktion	„und“
\vee	Disjunktion	„oder“
\rightarrow	Implikation	„wenn – dann“
\leftrightarrow	Äquivalenz	„genau dann, wenn“

Prädikatssymbole/aussagenlogische Variablen, z.B. p, q, r, s, ...

„richtiges“ Formen von Formeln – im Zweifelsfall klammern:

$$((p \wedge \neg q) \vee s) \rightarrow \neg p$$

$$(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)$$

Präzedenzen (bei uns): \neg vor \wedge, \vee vor $\rightarrow, \leftrightarrow$

Zusätzliche Klammern machen es trotzdem oft lesbarer ☺

Aussagenlogik: Beispiel

<i>Einfache Aussagen</i>	<i>Modellierung</i>
Es regnet.	r
Die Straße wird nass.	n
Die Sonne ist grün	g

<i>Zusammengesetzte Aussagen</i>	<i>Modellierung</i>
Wenn es regnet, dann wird die Straße nass.	$r \rightarrow n$
Wenn es regnet, und die Straße nicht nass wird, dann ist die Sonne grün.	$(r \wedge \neg n) \rightarrow g$

Prädikatenlogik erster Stufe (FOL): Syntax: Sprachelemente

Quantor	Name	Intuitive Bedeutung
\forall	Allquantor, universeller Quantor	„für alle“
\exists	Existenzquantor	„es existiert“

- Junktoren wie in der Aussagenlogik
- Variablen, z.B. X,Y,Z,...
- Konstantensymbole, z.B. a, b, c, ...
- Funktionssymbole, z.B. f, g, h, ... (mit Stelligkeit)
- Relations-/Prädikatssymbole, z.B. p, q, r, ... (mit Stelligkeit)

$$(\forall X)(\exists Y) ((p(X) \vee \neg q(f(X), Y)) \rightarrow r(X))$$

FOL: Syntax

„richtiges“ Formen von *Termen* aus Variablen, Konstanten- und Funktionssymbolen:

$$f(X), \quad g(a, f(Y)), \quad s(a), \quad .(H, T), \quad x_location(\text{Pixel})$$

„richtiges“ Formen von *Atomen* aus Relationssymbolen, deren Argumente Terme sind:

$$p(f(X)), \quad q(s(a), g(a, f(Y))), \quad add(a, s(a), s(a))$$

$$greater_than(x_location(\text{Pixel}), 128)$$

„richtiges“ Formen von *Formeln* aus Atomen, Junktoren und Quantoren:

$$(\forall \text{Pixel})(greater_than(x_location(\text{Pixel}), 128) \rightarrow red(\text{Pixel}))$$

Im Zweifelsfall klammern! Alle Variablen quantifizieren!

FOL Syntax: Beispiel *Addition*

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)$$

$$(\quad add(a, X, X)$$

$$\quad \wedge (add(X, Y, Z) \rightarrow add(s(X), Y, s(Z)))$$

$$)$$

Intendierte Semantik:

- a ... 0 (natürliche Zahl Null)
- s ... Nachfolgerfunktion/Addition von Eins
- add(x,y,z) ... „z ist die Summe von x und y“

FOL Syntax: Beispiel *Listen*

$$(\forall H)(\forall T)(list([]) \wedge (list(T) \rightarrow list(. (H, T))))$$

Informell: [] ... leere Liste

.(H,T) ... H ist Kopf, T Restliste

schreibe auch .(H,T) als [H|T]

$$(\forall H)(\forall T)$$

$$(member(a, [a|T])$$

$$\quad \wedge (member(a, T) \rightarrow member(a, [H|T]))$$

$$)$$

Intendierte Semantik:

member(x, liste) ... „x ist Element von liste“

FOL Syntax: Beispiel *Verwandtschaften*

$$(\forall X) (\text{parent}(X) \leftrightarrow (\text{human}(X) \wedge (\exists Y) \text{parent_of}(X,Y)))$$

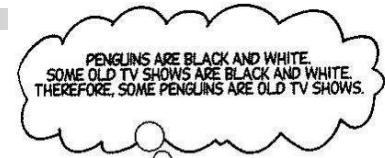
$$(\forall X) (\text{human}(X) \rightarrow (\exists Y) \text{parent_of}(Y,X))$$

$$(\forall X) (\text{orphan}(X) \leftrightarrow (\text{human}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{parent_of}(Y,X) \wedge \text{alive}(Y))))$$

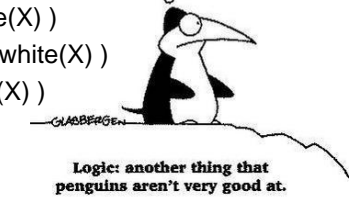
$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z) (\text{uncle_of}(X,Z) \leftrightarrow (\text{brother_of}(X,Y) \wedge \text{parent_of}(Y,Z)))$$

Intendierte Semantik: klar!

FOL Syntax: Beispiel *Pinguine*



$$\begin{aligned}
 & ((\forall X)(\text{penguin}(X) \rightarrow \text{blackandwhite}(X)) \\
 & \wedge (\exists X)(\text{oldTVshow}(X) \wedge \text{blackandwhite}(X)) \\
 &) \rightarrow (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X))
 \end{aligned}$$



Intendierte Semantik?



Mit Hilfe der Logik können wir ganz formal zeigen, dass der Pinguin unlogisch ist.

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. **Modelltheoretische Semantik**
4. Beweistheoretische Semantik
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren
5. Eigenschaften der Logiken

Aussagenlogik: Modelltheoretische Semantik

Interpretation:

Abbildung aller Prädikatssymbole nach $\{w, f\}$.

Ist F eine Formel und I eine Interpretation, dann ist I(F) ein Wahrheitswert, der aus F und I mittels **Wahrheitstafeln** ermittelt wird.

I(p)	I(q)	I(¬p)	I(p ∧ q)	I(p ∨ q)	I(p → q)	I(p ↔ q)
t	t	f	t	t	t	t
t	f	f	f	t	f	f
f	t	t	f	t	t	f
f	f	t	f	f	t	t

Aussagenlogik: Modelltheoretische Semantik

Wir schreiben $I \models F$, wenn $I(F)=w$ ist, und nennen dann die Interpretation I ein *Modell* der Formel F .

Zentrale Begriffe:

allgemeingültig (Tautologie)

erfüllbar

widerlegbar

widerspruchsvoll/widersprüchlich/**unerfüllbar**

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

Struktur:

- Festlegung eines Grundbereichs D .
- Konstantensymbole werden auf Elemente von D abgebildet.
- Funktionssymbole auf Funktionen auf D .
- Relationssymbole auf Relationen über D .

Dann:

- Terme werden zu Elementen von D .
- Relationssymbole mit Argumenten werden wahr oder falsch.
- Entsprechende Behandlung der Junktoren/Quantoren.

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik: Beispiel

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{add}(a,X,X) \\ \wedge (\text{add}(X,Y,Z) \rightarrow \text{add}(s(X),Y,s(Z))) \end{array} \right)$$

Modell I :

Grundbereich: natürliche Zahlen \mathbb{N}

$I(a) = 0$

$I(s): n \mapsto n+1$

$I(\text{add}(k,m,n))=w$ genau dann, wenn $k+m=n$ ist.

I ist Modell der Formel.

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik: Beispiel

$$F = \left(\begin{array}{l} (\forall X)(\text{penguin}(X) \rightarrow \text{blackandwhite}(X)) \\ \wedge (\exists X)(\text{oldTVshow}(X) \wedge \text{blackandwhite}(X)) \\ \rightarrow (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X)) \end{array} \right)$$

Interpretation I :

Grundbereich:

eine Menge M , die Elemente a,b,c enthält.

... keine Konstanten- oder Funktionssymbole ...

Wir zeigen: Die Formel ist widerlegbar (d.h. sie ist nicht allgemeingültig:

Sind $I(\text{penguin})(a)$, $I(\text{blackandwhite})(a)$, $I(\text{oldTVshow})(b)$, $I(\text{blackandwhite})(b)$ wahr, $I(\text{oldTVshow})(a)$ jedoch falsch, dann ist die Formel unter I falsch, d.h. $I \not\models F$.

**Mit Hilfe der Logik können wir ganz formal zeigen,
dass der Pinguin unlogisch ist.**

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

Wir schreiben $I \models F$, wenn $I(F)=w$ ist, und nennen dann die Interpretation I ein *Modell* der Formel F .

Zentrale Begriffe:

allgemeingültig (Tautologie)

erfüllbar

widerlegbar

widerspruchsvoll/widersprüchlich/**unerfüllbar**

Der Begriff der logischen Konsequenz

Eine *Theorie* T ist eine Menge von Formeln.

Eine Interpretation I ist ein Modell für T , wenn $I \models G$ für jede Formel G in T gilt.

Eine Formel F ist eine *logische Konsequenz* aus T , wenn jedes Modell von T auch Modell von F ist. Wir schreiben dann $T \models F$.

Zwei Formeln F, G heißen *logisch* (auch *semantisch äquivalent*), wenn $\{F\} \models G$ und $\{G\} \models F$ gelten.

Wir schreiben dann $F \equiv G$.

Einige logische Äquivalenzen

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$

$$F \vee G \equiv G \vee F$$

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

$$\neg\neg F \equiv F$$

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$\neg(\forall X) F \equiv (\exists X) \neg F$$

$$\neg(\exists X) F \equiv (\forall X) \neg F$$

$$(\forall X)(\forall Y) F \equiv (\forall Y)(\forall X) F$$

$$(\exists X)(\exists Y) F \equiv (\exists Y)(\exists X) F$$

$$(\forall X) (F \wedge G) \equiv (\forall X) F \wedge (\forall X) G$$

$$(\exists X) (F \vee G) \equiv (\exists X) F \vee (\exists X) G$$

DeMorgan'sche Regeln

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. Modelltheoretische Semantik
4. **Beweistheoretische Semantik**
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren
5. Eigenschaften der Logiken

Vorbereitung: Normalformen

Fakt: Zu jeder Formel gibt es unendlich viele logisch äquivalente Formeln.

Für jede solche *Äquivalenzklasse* sucht man nun einfache *Repräsentanten*.
Diese heißen *Normalformen*.

Einfaches Beispiel:
schreibe $\neg F$ statt $\neg\neg\neg\neg F$

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform*.

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
alle Negationen stehen ganz innen
2. Pränexnormalform
alle Quantoren stehen ganz vorne
3. Skolemisierte Pränexnormalform
Eliminierung der Existenzquantoren
4. konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform
Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

Normalformen: 1. Negationsnormalform

Alle Negationszeichen nach innen ziehen
durch Verwendung der folgenden Äquivalenzen:

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

$$\neg(\forall X) F \equiv (\exists X) \neg F \qquad \neg\neg F \equiv F$$

$$\neg(\exists X) F \equiv (\forall X) \neg F$$

Ergebnis:

- Keine \rightarrow und \leftrightarrow mehr.
- Keine mehrfachen Negationen mehr.
- Alle Negationszeichen stehen direkt vor Atomen.

Normalformen: 1. Negationsnormalform

Beispiel

$$\begin{aligned} & ((\forall X)(\text{penguin}(X) \rightarrow \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \wedge (\exists X)(\text{oldTVshow}(X) \wedge \text{blackandwhite}(X)) \\ &) \rightarrow (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X)) \end{aligned}$$

wird zu

$$\begin{aligned} & \neg((\forall X)(\neg\text{penguin}(X) \vee \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \wedge (\exists X)(\text{oldTVshow}(X) \wedge \text{blackandwhite}(X)) \\ &) \vee (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X)) \end{aligned}$$

und dann zu

$$\begin{aligned} & ((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg\text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \vee (\forall X)(\neg\text{oldTVshow}(X) \vee \neg\text{blackandwhite}(X)) \\ &) \vee (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X)) \end{aligned}$$

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform*.

Zwischenschritte:

1. **Negationsnormalform**
alle Negationen stehen ganz innen
2. **Pränexnormalform**
alle Quantoren stehen ganz vorne
3. **Skolemisierte Pränexnormalform**
Eliminierung der Existenzquantoren
4. **konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform**
Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

Normalformen: 2. Pränexnormalform

Erst Formel bereinigen

(Quantoren binden verschiedene Variablen).

$$\begin{aligned} & ((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \vee (\forall X)(\neg \text{oldTVshow}(X) \vee \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ &) \vee (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X)) \end{aligned}$$

wird zu

$$\begin{aligned} & ((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \vee (\forall Y)(\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y)) \\ &) \vee (\exists Z)(\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z)) \end{aligned}$$

Normalformen: 2. Pränexnormalform

Dann aus der Negationsnormalform einfach alle Quantoren in derselben Reihenfolge nach vorne ziehen.

$$\begin{aligned} & ((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \vee (\forall Y)(\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y)) \\ &) \vee (\exists Z)(\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z)) \\ & \text{wird zu} \\ & (\exists X)(\forall Y)(\exists Z)((\text{penguin}(X) \wedge \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ & \quad \vee (\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y))) \\ & \quad \vee (\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z)) \end{aligned}$$

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform*.

Zwischenschritte:

1. **Negationsnormalform**
alle Negationen stehen ganz innen
2. **Pränexnormalform**
alle Quantoren stehen ganz vorne
3. **Skolemisierte Pränexnormalform**
Eliminierung der Existenzquantoren
4. **konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform**
Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

Normalformen: 3. Skolemisierung

“Existenzquantoren entfernen”

$$(\exists X)(\forall Y)(\exists Z)(\text{penguin}(X) \wedge \neg \text{blackandwhite}(X)) \\ \vee (\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y))) \\ \vee (\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z))$$

wird zu ...

$$(\forall Y)(\text{penguin}(a) \wedge \neg \text{blackandwhite}(a)) \\ \vee (\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y))) \\ \vee (\text{penguin}(f(Y)) \wedge \text{oldTVshow}(f(Y)))$$

wobei a und f *neue* Symbole sind
(sog. *Skolemkonstanten* bzw. *-funktionen*).

Normalformen: 3. Skolemisierung

Vorgehensweise:

- Entfernen der Existenzquantoren von links nach rechts.
- Gibt es keinen Allquantor links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein neues Konstantensymbol ersetzt.
- Gibt es n Allquantoren links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein neues Funktionssymbol mit Stelligkeit n ersetzt, dessen Argumente genau die Variablen der n Allquantoren sind.

Vorbereitung: Normalformen

Ziel: Umwandlung von Formeln in *Klauselform*.

Zwischenschritte:

1. Negationsnormalform
alle Negationen stehen ganz innen
2. Pränexnormalform
alle Quantoren stehen ganz vorne
3. Skolemisierte Pränexnormalform
Eliminierung der Existenzquantoren
4. **konjunktive Normalform (CNF) = Klauselform**
Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

Normalformen: 4. Klauselform

Es gibt nur noch Allquantoren, also lassen wir sie weg:

$$(\text{penguin}(a) \wedge \neg \text{blackandwhite}(a)) \\ \vee (\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y))) \\ \vee (\text{penguin}(f(Y)) \wedge \text{oldTVshow}(f(Y)))$$

Mit Hilfe semantischer Äquivalenzen wird die Formel nun als Konjunktion von Disjunktionen geschrieben.

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

Normalformen: 4. Klauselform

$$\begin{aligned} & ((\text{penguin}(a) \wedge \neg \text{blackandwhite}(a)) \\ & \quad \vee (\neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y)))) \\ & \quad \vee (\text{penguin}(f(Y)) \wedge \text{oldTVshow}(f(Y)) \end{aligned}$$

wird zu ...

$$\begin{aligned} & ((\text{penguin}(a) \vee \neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y)) \\ & \quad \wedge (\neg \text{blackandwhite}(a) \vee \neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y)) \\ & \quad \vee (\text{penguin}(f(Y)) \wedge \text{oldTVshow}(f(Y)) \end{aligned}$$

wird zu ...

$$\begin{aligned} & (\text{penguin}(a) \vee \neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y) \vee \text{penguin}(f(Y))) \\ & \wedge (\text{penguin}(a) \vee \neg \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y) \\ & \quad \vee \text{oldTVshow}(f(Y))) \\ & \wedge (\neg \text{blackandwhite}(a) \vee \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y) \\ & \quad \vee \text{penguin}(f(Y))) \\ & \wedge (\neg \text{blackandwhite}(a) \vee \text{oldTVshow}(Y) \vee \neg \text{blackandwhite}(Y) \\ & \quad \vee \text{oldTVshow}(f(Y))) \end{aligned}$$

Besser lesbar?

Für Maschinen
schon!

Folie 45

Normalformen: Eigenschaften

Sei F eine Formel,
 G die Pränexnormalform von F ,
 H die skolemisierte Pränexnormalform von G ,
 K die Klauselform von H .

Dann ist $F \equiv G$ und $H \equiv K$ aber i.A. $F \not\equiv K$.

Es gilt jedoch:

F ist unerfüllbar genau dann, wenn K unerfüllbar ist.
 (Grundlage des Resolutionsverfahrens)

Idee: Rückführung
des Schließens
auf die Suche nach
Widersprüchen.

Folie 46

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. Modelltheoretische Semantik
4. **Beweistheoretische Semantik**
Vorbereitung: Normalformen
 - a) **Resolution**
 - b) Tableauverfahren
5. Eigenschaften der Logiken

Folie 47

Automatisierung: Resolution – Vorbereitungen

- Theorie**
- Diese Aussagen sind äquivalent!
- $\{F_1, \dots, F_n\}$ hat F_0 als logische Konsequenz
 - $\{F_1, \dots, F_n\} \models F_0$
 - $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F_0$ ist allgemeingültig
 - $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F_0)$ ist unerfüllbar
- Transformation in Klauselform
- $G_1 \wedge \dots \wedge G_k$ ist unerfüllbar
 - Das Resolutionsverfahren erlaubt die Ableitung eines Widerspruchs aus $G_1 \wedge \dots \wedge G_k$.

Folie 48

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

Ist

$$(p_1 \vee \dots \vee p_k \vee p \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l) \wedge (r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg p \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n)$$

wahr, dann:

Eins von p , $\neg p$ muss falsch sein. Also:

Eins der anderen muss wahr sein. D.h.

$$p_1 \vee \dots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n$$

muss wahr sein.

Ergo: Ist $p_1 \vee \dots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n$ **unerfüllbar**, dann auch

$$(p_1 \vee \dots \vee p_k \vee p \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l) \wedge (r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg p \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n)$$

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

$$(p_1 \vee \dots \vee p_k \vee p \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l) \quad (r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg p \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n)$$



Resolutionsschritt

$$\{K_1, K_2\} = K_3$$

$$p_1 \vee \dots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \dots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \dots \vee \neg s_n$$

Aus zwei Klauseln wird eine neue.

Werden Klauseln resolviert, die nur noch aus je einem Atom bzw. negierten Atom bestehen, dann entsteht eine „leere Klausel“, bezeichnet mit \perp .

Automatisierung: Resolution (Aussagenlogik)

Vorgehensweise, um einen Widerspruch aus einer Menge M von Klauseln abzuleiten:

1. Wähle zwei Klauseln aus M und erzeuge aus ihnen eine neue Klausel K durch einen Resolutionsschritt.
2. Ist $K = \perp$, dann ist ein Widerspruch gefunden.
3. Falls $K \neq \perp$, füge K zur Menge M hinzu und gehe zu 1.

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik)

In der Prädikatenlogik müssen bei der Resolution zusätzlich Variablenbindungen mit Hilfe von Substitutionen berücksichtigt werden.

$$\text{Z.B. } (p(X, f(Y)) \vee q(f(X), Y)) \quad (\neg p(a, Z) \vee r(Z))$$

Resolution mit $[X/a, Z/f(Y)]$ ergibt

$$(q(f(a), Y) \vee r(f(Y))).$$

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Terminologisches Wissen (DL: *TBox*): $(\forall X) (\text{human}(X) \rightarrow (\exists Y) \text{parent_of}(Y,X))$ $(\forall X) (\text{orphan}(X) \leftrightarrow$ $\text{human}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{parent_of}(Y,X) \wedge \text{alive}(Y)))$ Wissen um Individuen (DL: *ABox*): $\text{orphan}(\text{harrypotter})$ $\text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$ Können wir folgern: $\neg\text{alive}(\text{jamespotter})$?

(DL = Beschreibungslogik (Description Logic))

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Zu zeigen:

 $((\forall X) (\text{human}(X) \rightarrow (\exists Y) \text{parent_of}(Y,X))$ $\wedge (\forall X) (\text{orphan}(X) \leftrightarrow$ $\text{human}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{parent_of}(Y,X) \wedge \text{alive}(Y)))$ $\wedge \text{orphan}(\text{harrypotter})$ $\wedge \text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$ $) \rightarrow \neg\text{alive}(\text{jamespotter})$

ist allgemeingültig.

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Zu zeigen:

 $\neg((\forall X) (\text{human}(X) \rightarrow (\exists Y) \text{parent_of}(Y,X))$ $\wedge (\forall X) (\text{orphan}(X) \leftrightarrow$ $\text{human}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{parent_of}(Y,X) \wedge \text{alive}(Y)))$ $\wedge \text{orphan}(\text{harrypotter})$ $\wedge \text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$ $) \rightarrow \neg\text{alive}(\text{jamespotter})$

ist unerfüllbar.

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Pränexnormalform:

 $(\forall X)(\exists Y)(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\exists Y_2)$ $((\neg\text{human}(X) \vee \text{parent_of}(Y,X))$ $\wedge (\neg\text{orphan}(X_1)$ $\vee (\text{human}(X_1) \wedge (\neg\text{parent_of}(Y_1,X_1) \vee \neg\text{alive}(Y_1)))$ $\wedge (\text{orphan}(X_2)$ $\vee (\neg\text{human}(X_2) \vee (\text{parent_of}(Y_2,X_2) \wedge \text{alive}(Y_2)))$ $\wedge \text{orphan}(\text{harrypotter})$ $\wedge \text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$ $\wedge \text{alive}(\text{jamespotter})$

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Klauselform:

$$\begin{aligned}
 & (\neg \text{human}(X) \vee \text{parent_of}(f(X),X)) \\
 & \wedge (\neg \text{orphan}(X_1) \vee \text{human}(X_1)) \\
 & \wedge (\neg \text{orphan}(X_1) \vee \neg \text{parent_of}(Y_1, X_1) \vee \neg \text{alive}(Y_1)) \\
 & \wedge (\text{orphan}(X_2) \vee \neg \text{human}(X_2) \vee \\
 & \quad \text{parent_of}(g(X, X_1, Y_1, X_2), X_2)) \\
 & \wedge (\text{orphan}(X_2) \vee \neg \text{human}(X_2) \vee \text{alive}(g(X, X_1, Y_1, X_2))) \\
 & \wedge \text{orphan}(\text{harrypotter}) \\
 & \wedge \text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter}) \\
 & \wedge \text{alive}(\text{jamespotter})
 \end{aligned}$$

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik) – Beispiel

Wissen:

1. $(\neg \text{human}(X) \vee \text{parent_of}(f(X),X))$
2. $(\neg \text{orphan}(X_1) \vee \text{human}(X_1))$
3. $(\neg \text{orphan}(X_1) \vee \neg \text{parent_of}(Y_1, X_1) \vee \neg \text{alive}(Y_1))$
4. $(\text{orphan}(X_2) \vee \neg \text{human}(X_2) \vee \text{parent_of}(g(X, X_1, Y_1, X_2), X_2))$
5. $(\text{orphan}(X_2) \vee \neg \text{human}(X_2) \vee \text{alive}(g(X, X_1, Y_1, X_2)))$
6. $\text{orphan}(\text{harrypotter})$
7. $\text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$
8. $\text{alive}(\text{jamespotter})$

Abgeleitete Klauseln:

9. $\neg \text{orphan}(\text{harrypotter}) \vee \neg \text{alive}(\text{jamespotter})$ (3,7)
10. $\neg \text{orphan}(\text{harrypotter})$ (8,9)
11. \perp (6,10)

Automatisierung: Resolution (Prädikatenlogik)

Ein technisches Detail:

Damit das prädikatenlogische Resolutionsverfahren vollständig ist, wird neben der Resolutionsregel noch eine Faktorisierungsregel benötigt. Sie besagt:

Einhält eine Klausel K zwei Literale L_1 und L_2 , die unifizierbar mit mgu σ sind, dann kann $K\sigma$ abgeleitet werden.

Automatisierung: SLD-Resolution (Prädikatenlogik): pures Prolog

- Implementierung der prädikatenlogischen Resolution.
- Einschränkung: Klauseln dürfen nur je ein nichtnegiertes Atom enthalten.
Dadurch schnelleres Verfahren: SLD-Resolution. (Terminiert aber nicht immer.)
- Darstellung: $(p \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_n)$ als $p \leftarrow q_1, \dots, q_n$.
- "Aufsammeln" der Substitutionen beim Resolvieren zur Fragebeantwortung.

evtl. Demo

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. Modelltheoretische Semantik
4. **Beweistheoretische Semantik**
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren**
5. Eigenschaften der Logiken

Automatisierung: Tableauverfahren (Prädikatenlogik)

Vorgehensweise:

- Zeige Allgemeingültigkeit von Formel F .
- Keine Umwandlung in Normalform nötig.
(hier: nur Elimination von \rightarrow und \leftrightarrow)
- Negation der Formel: $\neg F$
- Konstruiere Tableau für $\neg F$.
Kann das Tableau *abgeschlossen* werden, dann ist F allgemeingültig.

Automatisierung: Tableauverfahren (Prädikatenlogik)

Regeln für Tableauerstellung:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \quad \frac{F_1 \wedge F_2}{F_1} \quad \frac{F_1 \vee F_2}{F_1 | F_2} \quad \frac{\neg(F_1 \vee F_2)}{\neg F_1} \quad \frac{\neg(F_1 \wedge F_2)}{\neg F_1 | \neg F_2}$$

$$\frac{(\forall X)F}{F\{X \mapsto Y\}} \quad \frac{\neg(\exists X)F}{\neg F\{X \mapsto Y\}} \quad \text{mit } Y \text{ als neue freie Variable}$$

$$\frac{(\exists X)F}{F\{X \mapsto f(X_1, \dots, X_n)\}} \quad \frac{\neg(\forall X)F}{\neg F\{X \mapsto f(X_1, \dots, X_n)\}}$$

mit f als neuem Skolemfunktionszeichen und
 X_1, \dots, X_n als alle in F frei vorkommenden Variablen

Automatisierung: Tableaus (Prädikatenlogik) – Beispiel

$$\neg(\neg((\forall X) (\neg\text{orphan}(X) \vee$$

$$(\text{human}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{parent_of}(Y,X) \wedge \text{alive}(Y))))))$$

$$\wedge \text{orphan}(\text{harrypotter})$$

$$\wedge \text{parent_of}(\text{jamespotter}, \text{harrypotter})$$

$$\vee \neg\text{alive}(\text{jamespotter}))$$

Kürzer:

$$\neg(\neg(\neg(\forall X) (\text{o}(X) \rightarrow (\text{h}(X) \wedge \neg(\exists Y) (\text{pof}(Y,X) \wedge \text{al}(Y))))))$$

$$\wedge \text{o}(\text{harry}) \wedge \text{pof}(\text{james}, \text{harry}))$$

$$\vee \neg\text{al}(\text{james}))$$

Beispieltableau auf nächster Folie!

Inhalt Logik

1. Was ist Semantik – allgemein
2. Syntax Aussagenlogik + FOL
3. Modelltheoretische Semantik
4. Beweistheoretische Semantik
Vorbereitung: Normalformen
 - a) Resolution
 - b) Tableauverfahren
5. **Eigenschaften der Logiken**

- $\neg(\neg(\forall X (\neg o(X) \vee (h(X) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,X) \wedge al(Y)))) \wedge o(harry) \wedge pof(james,harry)) \vee \neg al(james)))$
- $\neg\neg(\forall X (\neg o(X) \vee (h(X) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,X) \wedge al(Y)))) \wedge o(harry) \wedge pof(james,harry)))$
- $\neg\neg al(james)$
- $(\forall X (\neg o(X) \vee (h(X) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,X) \wedge al(Y)))) \wedge o(harry) \wedge pof(james,harry)))$
- $al(james)$
- $(\forall X (\neg o(X) \vee (h(X) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,X) \wedge al(Y))))$
- $o(harry)$
- $pof(james,harry)$
- $\neg o(Z) \vee (h(Z) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,Z) \wedge al(Y))))$
- $\neg o(Z)$ mit $[Z/harry]$

- $h(Z) \wedge \neg(\exists Y (pof(Y,Z) \wedge al(Y)))$
- $h(Z)$
- $\neg(\exists Y (pof(Y,Z) \wedge al(Y)))$
- $\neg(pof(W,Z) \wedge al(W))$
- $\neg pof(W,Z)$ mit $[W/james]$
- $\neg al(W)$

globale Bindung!

globale Bindung!

Eigenschaften der Prädikatenlogik

- **Monotonie**
Bei Vergrößerung des Wissens gehen keine Schlussfolgerungen verloren.
- **Kompaktheit**
Für jede Schlußfolgerung aus einer Theorie genügt eine endliche Teilmenge der Theorie.
- **Semientscheidbarkeit**
Alle *wahren* Schlüsse lassen sich finden, wenn man lange genug sucht.

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Alle genannten Eigenschaften der Prädikatenlogik.
- **Entscheidbarkeit**
Alle *wahren* Schlüsse lassen sich finden, und alle *falschen* Schlüsse lassen sich widerlegen, wenn man lange genug sucht.
D.h. es gibt *immer terminierende* automatische Beweiser.

Wichtige Fragmente von FOL

- Aussagenlogik
- Datalog (Wie pures/reines Prolog, aber ohne Funktionssymbole)
entscheidbar
- Disjunktives Datalog (Klauseln ohne Funktionssymbole)
entscheidbar
- Hornklauseln (pures/reines Prolog)
seminentscheidbar
- Beschreibungslogiken
entscheidbar (manche)

z.B. OWL → nächster Teil der Vorlesung