4. Algorithmen

1. Informatik: Eine Übersicht
2. Objektorientierte Modellierung
3. Logik (Einführung / Grundlagen)
4. Algorithmen
    4.1 Einführung
    4.2 Eigenschaften
    4.3 Komplexität
5. Entwurfsmethoden für Algorithmen
6. Sortieralgorithmen
7. Dynamische Datenstrukturen

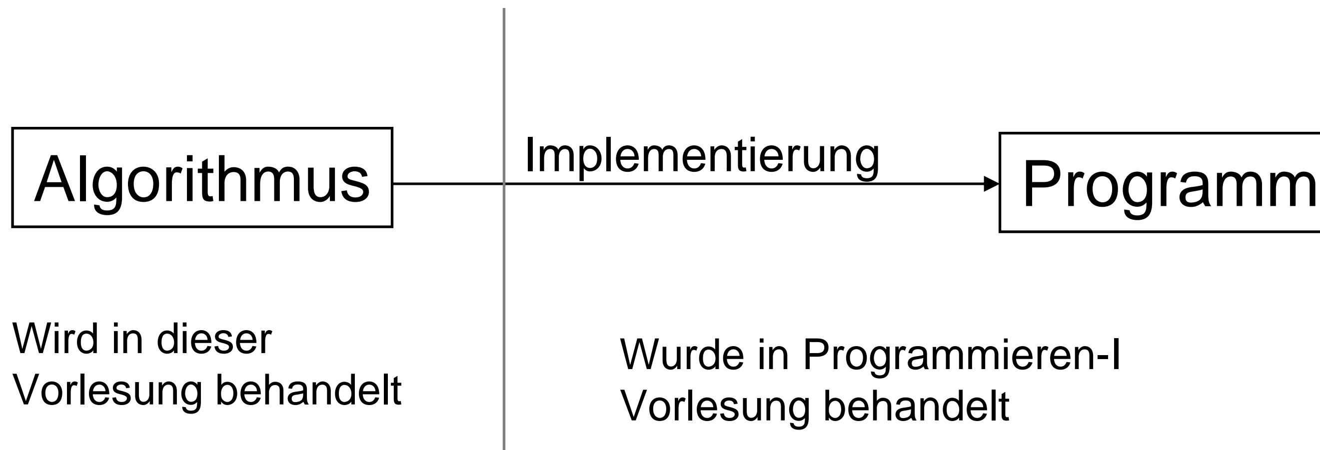
AIFB

©AIFB

4.1 Einführung

Definition von Algorithmus (zunächst nur eine vage Charakterisierung später genauere Beschreibung)

„Ein ***Algorithmus*** ist ein **exaktes Verfahren** zur Lösung eines Problems“

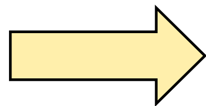


AIFB
©AIFB

4.1 Einführung

Bestandteile eines Algorithmus:

- **Objekte**: Darauf soll eine Wirkung ausgeübt werden.
  Sie können abstrakter oder auch konkreter Natur sein.
- **Handlungen**: Wirken – in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt - in gewünschter Weise auf die Objekte ein.



Zustandsänderungen an Objekten

AIFB

©AIFB

4.1 Einführung

Beispiel: Auswechseln eines Reifens am Auto

1. Löse die Radmuttern.
2. Hebe den Wagen an.
3. Schraube die Radmuttern ab.
4. Tausche das Rad gegen ein anderes Rad aus.
5. Schraube die Radmuttern an.
6. Setze den Wagen ab.
7. Ziehe die Radmuttern fest.

Die Abarbeitung der Schritte (1) und (2) könnte auch vertauscht werden.

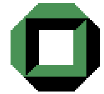
AIFB

©AIFB

4.1 Einführung

Beobachtungen:

- Anwender des Algorithmus muss jeden einzelnen Schritt verstehen und ausführen können
- Verfahren enthält Folge von Handlungen in fester Reihenfolge ODER über Reihenfolge wird erst während der Ausführung des Algorithmus entschieden (notwendig: entsprechende Sprachkonstrukte)
- Abarbeitungsreihenfolge mancher Einzelschritte nicht von Bedeutung.
- Ausführungsorgan / Prozessor muss über gewisse elementare Fähigkeiten (**Elementaroperationen**) verfügen



AIFB

©AIFB

4.1 Einführung

AIFB

©AIFB

Begriff des Algorithmus in der Informatik

- Einzelne Handlungen werden „computerverständlich“ formuliert.
  - (Halb)-formale Darstellung für Entwurf und Bearbeitung von Algorithmen
- Beteiligte Objekte werden „computerverständlich“ formuliert, indem man ihre Eigenschaften durch Daten beschreibt.
  - Beispiel: Eine einzelne **Person** wird durch **Größen** wie Name, Alter, Wohnort, ... beschrieben.

4. Algorithmen

1. Informatik: Eine Übersicht

2. Objektorientierte Modellierung

3. Logik (Einführung / Grundlagen)

4. Algorithmen

   4.1 Einführung

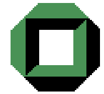
   4.2 Eigenschaften

   4.3 Komplexität

5. Entwurfsmethoden für Algorithmen

6. Sortieralgorithmen

7. Dynamische Datenstrukturen



AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

AIFB

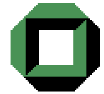
©AIFB

Denkbare Klassifizierung

- **Problemunabhängige Eigenschaften:** beziehen sich ausschließlich auf den betrachteten Algorithmus, nicht jedoch auf das Problem oder dessen Spezifikation (z.B. Endlichkeit, Determiniertheit, Rekursivität)

- **Problembezogene Eigenschaften:** sind dagegen für einen Algorithmus in Bezug auf die entsprechende Spezifikation erklärt. (z.B. Korrektheit, Effizienz)

4.2 Eigenschaften



Endlichkeit

Erste Endlichkeitsbedingung (E1): *Ein Algorithmus muss endlich beschreibbar sein, d.h. durch einen endlichen Text formulierbar.*

- unmittelbar einleuchtende Forderung für jeden Algorithmus
- bezieht sich auf **Beschreibung**, nicht auf Ausführung
- Beschreibung besteht aus **endlich** vielen elementaren Operationen; zur Ausführungszeit können jedoch beliebig viele neue Operationssequenzen durchlaufen werden (z.B. durch rekursive Prozeduraufrufe), die eventuell dazu führen, dass der Algorithmus nicht terminiert
- endliche Beschreibbarkeit hängt von der zur Verfügung stehenden Sprache ab, also von den **Ablaufstrukturen** und **Elementaroperationen**

©AIFB

4.2 Eigenschaften

■ Beispiel **Eine rationale Zahl *a* soll mit einer Zahl $n \in IN_0$ multipliziert werden**

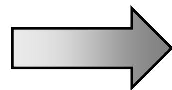
Eingabe: a rational, $n \in IN_0$

Ausgabe: $x = n * a$.

Rahmenbedingungen:

- **Elementaroperationen:** Zuweisung (:=), Addition (+), Subtraktion (-), Gleichheit (=)

  Ablaufstrukturen: Sequenz, Schleife (WHILE)



Algorithmus:

```
BEGIN
    Eingabe: a, n;
    x := 0;
        WHILE n ≠ 0 DO
            x := x + a;
            n := n - 1
        END (* WHILE *);
    Ausgabe: x;
END.
```

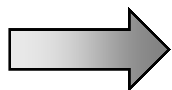
AIFB ©AIFB

4.2 Eigenschaften

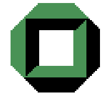
Elementaroperationen: wie zuvor

Ablaufstrukturen: Sequenz, Verzeigung (IF-THEN-ELSE)

```
BEGIN
    Eingabe: a, n;
    x := 0;
    IF n = 0 THEN
            Ausgabe: x
            ELSE n := n - 1;
                x := x + a;
                IF n = 0 THEN
                        Ausgabe: x
                        ELSE n := n - 1;
                            x := x + a;
                            IF n = 0 THEN
                                    ...
```



Endliche Beschreibung mit vorhandenen Ablaufstrukturen nicht möglich!



©AIFB

4.2 Eigenschaften

Für den praktischen Umgang mit Algorithmen ist Forderung **(E1)** nicht ausreichend.

Zweite Endlichkeitsbedingung (E2): *Ein Algorithmus soll in endlicher Zeit ausführbar sein. D*.h. für jede erlaubte Eingabe terminiert der Algorithmus nach endlicher Ausführungszeit.

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

■ Beispiel Gegebener Algorithmus

```
BEGIN
    Eingabe: n;
    REPEAT
            n := n + 1
    UNTIL n = 50;
    Ausgabe: "fertig";
END.
```

Algorithmus terminiert nur für die Eingaben 1, 2, ..., 49, dagegen nicht für größere Zahlen.

Forderung **(E2)** nicht erfüllt.

©AIFB

4.2 Eigenschaften

Folgerungen aus **(E2)**:

➡ Jede Elementaroperation muss in endlicher Zeit ausführbar sein

■ Beispiel **nicht zulässige Elementaroperation**

$\sqrt{n}$ (nicht für jedes n in endlicher Zeit ausführbar)

➡ Beteiligte Größen müssen endlich beschreibbar sein

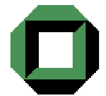
■ Beispiel **nicht zulässige Darstellung einer Größe**

1/3 = 0.333333333...

- entweder: hinreichend genaue Näherung
- oder: Zahlenpaar (1, 3) wird benutzt (Interpretation als Bruch)

AIFB ©AIFB

4.2 Eigenschaften

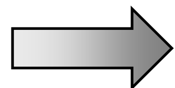


Determiniertheit (Globale Eindeutigkeit):

Ein Algorithmus heißt ***determiniert***, falls er eine eindeutige Abhängigkeit der Ausgabedaten von den Eingabedaten garantiert.

Determinismus (Lokale Eindeutigkeit):

Ein Algorithmus heißt ***deterministisch***, falls die Wirkung bzw. das Ergebnis jeder einzelnen Anweisung eindeutig ist und an jeder einzelnen Stelle des Ablaufs festliegt, welcher Schritt als nächster auszuführen ist.



Jeder deterministische Algorithmus ist determiniert

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

Ursachen für nicht-deterministisches Verhalten von Algorithmen:

(1) Nicht-Determinismus in den **Elementaroperationen**,

d.h. die Wirkung bzw. das Ergebnis einer Operation ist nicht eindeutig festgelegt.

(2) Nicht-Determinismus in den **Ablaufstrukturen**,

d.h. die Ausführungsreihenfolge von Anweisungen ist nicht eindeutig festgelegt.

©AIFB

4.2 Eigenschaften

- **Beispiel** **Binäres Suchen in einer sortierten Folge (nicht-deterministisch)**

Mitte der betrachteten Teilfolge wird nicht berechnet, sondern beliebig aus {*Li*+1, ..., *Re*-1} ausgewählt

```
ALGORITHMUS bin_suche_ndet;
  BEGIN
  Eingabe: k_1,..., k_n, k;k ∈ {k_1,..., k_n}
           und n>=1;

    Li := 0;
    Re := n + 1;
    WHILE Li < Re - 1 DO
      "Wähle M ∈ {Li+1, ...,Re-1}";
      IF k < k_M THEN
        Re := M
      ELSE Li := M
      END (* IF *)
    END (* WHILE *);
    Ausgabe: Re
  END;
```

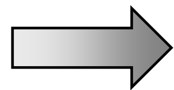
- Algorithmus ist **nicht-deterministisch** („Auswahl“ ist elementare Operation ohne eindeutig bestimmtes Ergebnis)
- Algorithmus ist **determiniert** (Ausgabe hängt in eindeutiger Weise von Eingabe ab)

AIFB

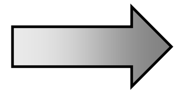
©AIFB

4.2 Eigenschaften

Determiniertheit als Grundeigenschaft eines Algorithmus oft gefordert; allerdings gibt die Spezifikation manchmal einen gewissen Spielraum, z. B.

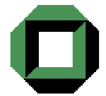


Gegeben sei der Radius r eines Kreises.



Gesucht ist der Flächeninhalt des Kreises mit einer Abweichung von höchstens ±0.00025

d. h. Näherungslösungen möglich



AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

AIFB

©AIFB

Rekursivität

Beispiele

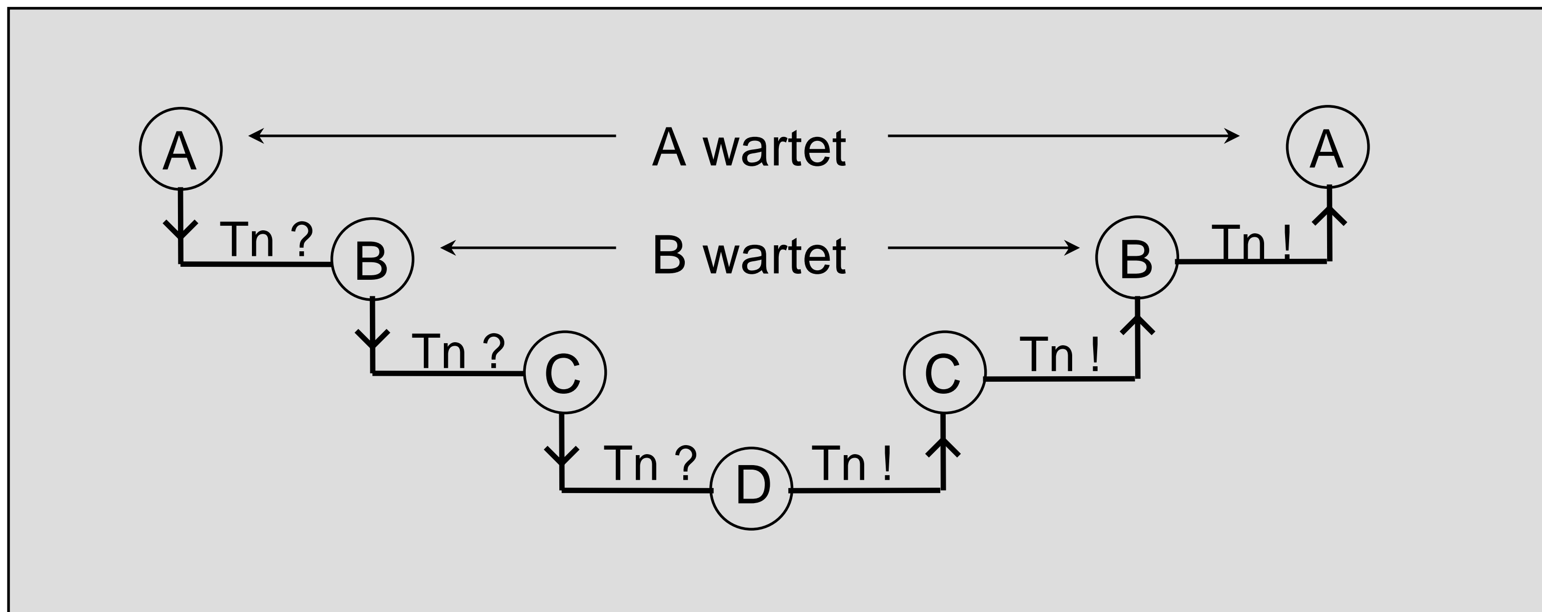
- Rückkopplung bei Schallübertragung/-verstärkung
- Spiegelbild zwischen zwei Spiegeln
- "Bild vom Bild" (Kamera, die Monitor mit eigenem Bild aufnimmt)
- Fakultätsfunktion: $0! = 1$
  $n! = n * (n-1)!$
- Fibonacci-Folge fib(0), fib(1), fib(2), ...:

  $\mathrm{fib}(0) = 0$
  $\mathrm{fib}(1) = 1$
  $\mathrm{fib}(n) = \mathrm{fib}(n-1) + \mathrm{fib}(n-2)$

4.2 Eigenschaften

"Erfragen einer Telefonnummer"

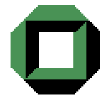
A ruft B an und fragt nach Telefonnummer Tn;
B kennt Tn nicht, weiß aber dass C sie kennt;
B ruft C an und fragt nach Tn;
C hat sein Notizbuch bei D vergessen;
C ruft D an und fragt nach Tn;
D teilt C, C teilt B und B teilt A die Telefonnummer mit.



AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften



Definition: Ein Algorithmus heißt ***rekursiv***, wenn er sich selbst wieder benutzt.

- **direkte Rekursion:**
  Algorithmus ruft sich selbst wieder auf

- **indirekte Rekursion:**
  Man hat mehrere Algorithmen $A_1,..., A_n$ (n > 1):

  A_1 ruft A_2 auf,
  A_2 ruft A_3 auf
  ...
  A_{n-1} ruft A_n auf,
  A_n ruft A_1 auf.

©AIFB

4.2 Eigenschaften

Schema eines direkt rekursiven Algorithmus A:

EP: Eingabeparameter von A

```
IF  "Abbruchbedingung erfüllt"  THEN
     (* z.B. EP minimal *)

     "direkte Lösung"
     (* ggf. mit weiterem Algorithmus B *)

ELSE  "stelle augenblickliche Aufgabe zurück";

          "führe A für modifizierte Parameter EP aus";

          "berechne endgültige Lösung"

END   (* IF *)
```

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

- Beispiel **Direkte Rekursion: Binäres Suchen (rekursiv)**

ALGORITHMUS bin_suche_rek (*Li, Re*);
(* durchsucht $k_{Li+1},\ldots,k_{Re-1}$ nach Schlüsselwert *k* *)

```
BEGIN
    IF (Li < Re -1) THEN
        M := (Li + Re) DIV 2;
        IF (k < k_M) THEN
            RETURN bin_suche_rek (Li,M)
        ELSE RETURN bin_suche_rek (M,Re)
        END (* IF *)
    ELSE RETURN Re -1
    END (* IF *)
END.
```

Erster Aufruf: bin_suche_rek (0, n+1)

©AIFB

4.2 Eigenschaften

- Beispiel

Indirekte Rekursion:
Test, ob Zahl gerade oder ungerade ist

```
ALGORITHMUS ungerade (n);

    BEGIN
        IF n = 0 THEN
            RETURN FALSE
        ELSE RETURN gerade(n-1)
        END (* IF *)
    END;


ALGORITHMUS gerade (n);

    BEGIN
        IF n = 0 THEN
            RETURN TRUE
        ELSE RETURN ungerade(n-1)
        END (* IF *)
    END;
```

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

■ Beispiel **Fibonacci-Zahlen**

a) rekursiv

```
ALGORITHMUS fibo (n);

    BEGIN
        IF n = 0 THEN
            RETURN 0
        ELSE   IF n = 1 THEN
                    RETURN 1
                ELSE RETURN fibo(n-1) + fibo(n-2)
                END (* IF *)
        END (* IF *)
    END;
```

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

b) iterativ

```
ALGORITHMUS  fibo2 (n);

    BEGIN
        x := 0; y := 1;
        FOR i := 2 TO n DO
            hilf := y;
            y := x + y;
            x := hilf;
        END (* FOR *);
        IF n = 0 THEN
            RETURN x
        ELSE RETURN y
        END (* IF *);
    END;
```

- rekursiver Algorithmus oft kürzer als nicht-rekursiver
- rekursiver Algorithmus **nicht** zwangsläufig effizienter

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

AIFB

©AIFB

Parallelität

- **ein Prozessor:** streng sequentielle Ausführung
- **mehrere Prozessoren:** gleichzeitige Ausführung verschiedener Teile eines Algorithmus eventuell möglich

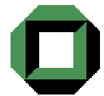
sequentiell	parallel	
Prozessor 1: $x := 3;$ $y := 4;$	*Prozessor 1:* $x := 3;$	*Prozessor 2:* $y := 4;$

4.2 Eigenschaften

- Beispiel **sequentielle und parallele Verarbeitung einer Anweisungsfolge mit unterschiedlichen Ergebnissen**

sequentiell	parallel	
Prozessor 1: $x := 3;$ $y := x;$	*Prozessor 1:* $x := 3;$	*Prozessor 2:* $y := x;$

Ein Algorithmus heißt **parallel**, wenn er so in Teilaufgaben aufgeteilt ist, dass diese gleichzeitig durch verschiedene Prozessoren ausgeführt werden können.



AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

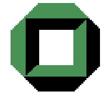
Einschränkung der Parallelverarbeitung durch:

- **Datenabhängigkeit:**

  Anweisung a_j kann erst nach Anweisung a_i ausgeführt werden, da a_j Daten benötigt, die von a_i berechnet oder verändert werden.

- **Prozedurale Abhängigkeit:**

  Es muss erst entschieden werden, wohin sich ein Programm verzweigt, bevor die Anweisungen, die auf die Verzweigungen folgen, den zur Verfügung stehenden Prozessoren zugeordnet und von ihnen ausgeführt werden können.



AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

Vorgehensweisen, um parallel ausführbare Teile zu finden und festzulegen:

- Auffinden von Datenabhängigkeiten und parallel auszuführenden Teilen durch:
  - **Datenflussgraphen**
    (Knoten entsprechen Operatoren, Pfeile stellen Datenfluss dar)
  - **Präzedenzgraphen**
    (mögliche Ausführungsreihenfolgen der Operationen)

- Programmierer gibt parallel auszuführende Teile explizit an
  → Programmiersprache muss entsprechende **Schlüsselwörter** zur Verfügung stellen, z. B.

PARBEGIN
$a_1; a_2; ...; a_n$
PAREND;

AIFB

©AIFB

4.2 Eigenschaften

- Beispiel

Problem beim gleichzeitigen Zugriff auf dieselbe Größe

Verschiedene Buchungen einer Bank können gleichzeitig auf verschiedenen Prozessoren durchgeführt werden.

Algorithmus für einzelne Buchung:

(V1) "Lese vom Beleg Kontonummer K und Betrag B";
(V2) "Lese Kontostand S von Konto K und weise ihn X zu";
(V3) $X := X + B$;
(V4) "Trage X als neuen Kontostand von K ein".

Bei zwei verschiedenen Einzahlungen von 1000,- und 5000,- für das Konto 3089:

Prozessor 1:		Prozessor 2:	
K=3089; B=1000	(V1)	K=3089; B=5000	(V1)
$X := S$;	(V2)		
		$X := S$;	(V2)
$X := X + B$;	(V3)	$X := X + B$;	(V3)
$S := X$;	(V4)		
		$S := X$;	(V4)

Was ist der resultierende Kontostand?

AIFB

©AIFB

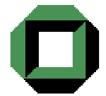
4.2 Eigenschaften

Unter **Universalität** versteht man die Forderung, dass ein Algorithmus nicht nur eine konkrete Ausprägung eines Problems, sondern eine möglichst allgemeine **Problemklasse** löst.

■ Beispiel **Sortieralgorithmus**

- soll nicht nur konkrete Zahlenfolge, z. B.
  5, 17, 2, 45, 67, 30, 12, 9, 3,
  sondern beliebige Zahlenfolgen endlicher Länge sortieren

- **universeller:**
  nicht nur Zahlenfolgen, sondern beliebige endliche Folgen (totale Ordnung vorausgesetzt)
  → Wiederverwendbarkeit



AIFB

©AIFB

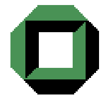
4. Algorithmen

1. Informatik: Eine Übersicht
2. Objektorientierte Modellierung
3. Logik (Einführung / Grundlagen)
4. Algorithmen
   - 4.1 Einführung
   - 4.2 Eigenschaften
   - 4.3 Komplexität
5. Entwurfsmethoden für Algorithmen
6. Sortieralgorithmen
7. Dynamische Datenstrukturen

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität



AIFB

Wichtiges Merkmal von Algorithmen:

Komplexität, d.h.

- Wieviel Zeit
- Wieviel Speicherplatz

benötigt ein Algorithmus zur Ausführung?

Ziel bei der Entwicklung von Algorithmen:

- möglichst effiziente Algorithmen,
  d.h. geringer Zeit- und Speicherplatzverbrauch

Im Folgenden betrachtet: Zeitkomplexität / Verbrauch an Rechenzeit

©AIFB

4.3 Komplexität

Einflussfaktoren:

(a) Anzahl und Größe der Eingabedaten ("Problemgröße")

(b) der Algorithmus selbst (insbesondere Art und Zusammensetzung seiner Ablaufstrukturen)

(c) Eigenschaften der zur Ausführung eingesetzten Rechenanlage (z.B. Schnelligkeit, Befehlssatz)

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

■ Beispiele **zu (a) Anzahl und Größe der Eingabedaten**

Sortieren von Zahlenfolgen:

Die Größe der zu sortierenden Folge (**Problemgröße**) hat großen Einfluss.

⇨ *Sortieren einer Folge von 5 Zahlen ist offensichtlich schneller als Sortieren einer Folge von 1000 Zahlen !*

Problemgröße kann sein:

- Länge einer Folge (z.B. Shortest Path, Job-Scheduling)
- Größe einer Zahl (z.B. Primzahlfaktorisierung)

AIFB

©AIFB

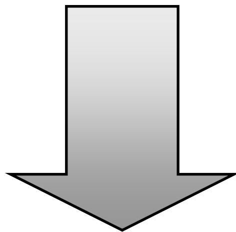
4.3 Komplexität

zu (b) Algorithmus selbst

betrachte folgende Teile von Algorithmen:

```
Eingabe: n;
i := 0;
FOR k:=1 TO n DO
    i:= i + 1
END (* FOR *);
Ausgabe: i;
```

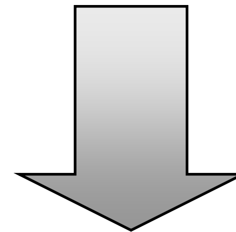
FOR-Schleife wird n-mal durchlaufen.



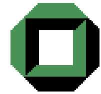
Anweisung i:=i+1 wird n-mal ausgeführt.

```
Eingabe: n;
i := 0;
FOR k:=1 TO n DO
    FOR j:=1 TO k DO
        i:= i + 1
    END (* FOR *)
END (* FOR *);
Ausgabe: i;
```

Verschachtelung zweier FOR-Schleifen.



Anweisung i:=i+1 wird n*(n+1)/2 - mal ausgeführt.



AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

zu (c) Art der Rechenanlage

- Eigenschaften der eingesetzten Rechenanlage nehmen Einfluss auf die Ausführungszeit

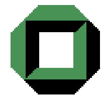
- Bei Komplexitätsberechnungen von Algorithmen wird jedoch von diesem Parameter abstrahiert

- Betrachtung einer abstrakten Maschine, die die Operationen von modernen Rechnern simulieren und prinzipiell die gleichen Berechnungen wie diese durchführen können.
  z.B. - **Random-Access-Maschine (RAM)**
  - **Turing-Maschine** (vgl. Grundlagen II)

- Abstrakte Maschinen haben einen einfachen Befehlssatz.

- Messung der Komplexität von Algorithmen:

  ⇒ *Zählen der ausgeführten elementaren Rechenschritte*



AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Idealisierende Annahmen:

- Jede Elementaroperation (Zuweisung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Vergleich zweier Zahlen, etc.) benötigt genau einen Rechenschritt
- Aufwendige Operationen (z.B. Matrizenmultiplikation) nicht verfügbar
- Einheitliche Größe der betrachteten Daten, Darstellung in jeweils einer Speicherzelle

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Fragestellungen:

Welchen Zeitbedarf hat ein **konkreter** Algorithmus *A* zur Lösung eines Problems *P* in Abhängigkeit von der Größe *n* der Eingabedaten?

⇒ *Anzahl der Elementaroperationen (**ELOP**), die nötig sind, um mit A eine Problemausprägung der Größe n zu lösen*

Welchen Zeitbedarf hat ein **optimaler** Algorithmus zur Lösung von *P* ?
Beispiel: „Suchen“: sequentielles Suchen, binäres Suchen

⇒ *Frage meist nur schwer zu beantworten (oft ist zu Algorithmus A, der P löst, kein besserer Algorithmus bekannt, aber auch nicht bewiesen, dass es keinen besseren gibt.)*

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem konkreten Zeitbedarf eines Algorithmus!

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Geg.: Algorithmus *A*

Eingabe *e* für spezielle Problemausprägung der Größe *n*

Die Menge aller möglichen Eingaben zu *n*: E_n

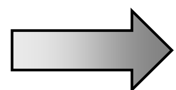
t (A; n, e) bezeichne die Anzahl der durchzuführenden Elementaroperationen bei der Ausführung von *A* bezüglich der Eingabe *e*.

Ferner seien:

$T_{min}(A; n)$ ::= min{ $t(A; n, e)$ | $e \in E_n$ }, ***"best-case"***

$T_{avg}(A; n)$ ::= avg{ $t(A; n, e)$ | $e \in E_n$ } ***"average-case"***

$T_{max}(A; n)$ ::= max{ $t(A; n, e)$ | $e \in E_n$ } ***"worst-case"***



Alle drei Funktionen sind Maße für die ***Zeitkomplexität*** von *A*

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Bemerkungen:

- **best-case-** bzw. **worst-case-Komplexität** beschreiben Zeitbedarf im besten bzw. schlechtesten Fall

- **average-case-Komplexität** mittelt den Zeitbedarf über alle möglichen Eingaben der Größe n

  average-case-Komplexität ist nur schwer zu bestimmen (nur realistisch, wenn alle Problemausprägungen gleich wahrscheinlich)

- Analog **Speicherkomplexität S (A; n)**

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

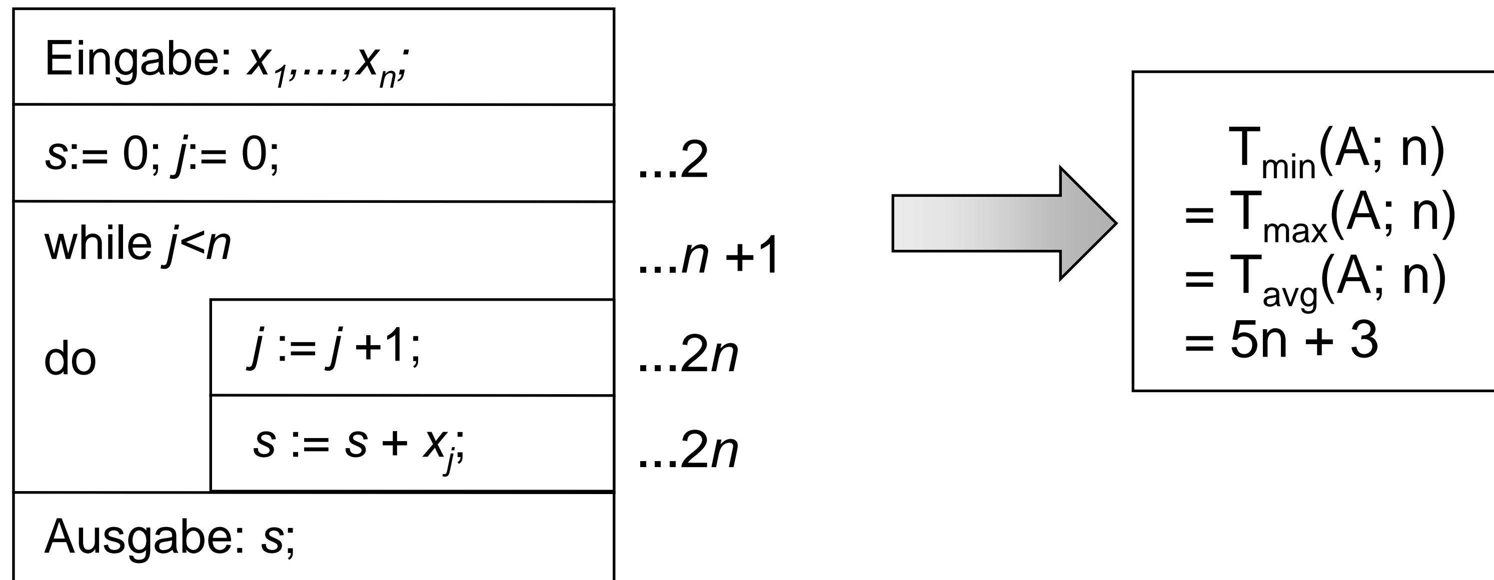
- **Beispiel** — **Berechnung der Summe s von n Zahlen**

Eingabe: $x_1, x_2, ..., x_n$, mit $n \in$ IN und $x_i \in$ IN für alle $i \in \{1, ..., n\}$

Ausgabe: $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Elementaroperationen: Zuweisung (:=), Vergleich (<), Addition (+), ...

Für jede Zahlenfolge der Länge *n* lässt sich die Anzahl der ELOPs wie folgt bestimmen:



AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Für größere Beispiele ist es zu aufwendig, für jede mögliche Eingabe die Anzahl der ELOPs zu bestimmen.

Angabe des Zeitbedarfs i.a. nur **größenordnungsmäßig** (in Abhängigkeit von der Größe der Eingabe)

Beschreibung des Wachstums des Zeitbedarfs, sogenannte

"Groß-Oh-Notation"

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Definition:

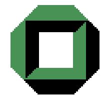
Es sei P die Menge aller Funktionen f : IN → IR, und es sei $g \in P$.
Dann wird festgelegt:

(a) O(g) ::= $\{ f \in P \mid \exists\, n_0 \in IN\ \exists\, c > 0\ \forall\, n > n_0 : |f(n)| \leq c * |g(n)| \}$

Für $f \in O(g)$ sagt man: "f **wächst höchstens so stark** wie g", bzw.
"f hat **höchstens die Ordnung** g", bzw.
"f ist aus Groß-Oh von g".

(b) Ω(g) ::= $\{ f \in P \mid \exists\, n_0 \in IN\ \exists\, c > 0\ \forall\, n > n_0 : |f(n)| \geq c * |g(n)| \}$

Für f ∈ Ω(g) sagt man: "f **wächst mindestens so stark** wie g", bzw.
"f hat **mindestens die Ordnung** g".



AIFB

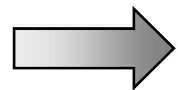
©AIFB

4.3 Komplexität

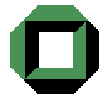
(c) Θ**(g)** ::= O(g) $\cap$ Ω(g).

Für f $\in$ Θ(g) sagt man: "f **wächst genauso stark** wie g", bzw.
"f hat **genau die Ordnung** g".

In diesem Fall gilt auch die Umkehrung g $\in$ Θ(f).



O(g), Ω**(g)** und Θ**(g)** beschreiben also **Mengen von Funktionen**, die für große **n** höchstens bzw. mindestens bzw. genauso stark wachsen wie die Funktion g.



AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

- Beispiel

(a) Funktion von Beispiel: Summe von *n* Zahlen: $\mathbf{f(n)=5n+3}$

Es gilt: $f \in O(g)$, mit $g(n) = n$

Schreibweise: $\mathbf{f \in O(n)}$

(b) $\mathbf{f(n) = n^2 + 1000n \in O(n^2)}$

denn: wähle etwa $c = 2$, $n_0 = 1000$

$n^2 + 1000n \leq c * n^2 \;\; \forall\, n \geq n_0$

©AIFB

4.3 Komplexität

(c) Allgemeiner: sei für $i \in \{0, ..., k\}$: $a_i \in \mathbb{R}$,
für $i \in \{0, ..., j\}$: $b_i \in \mathbb{R}$,
ferner $a_k \neq 0$ und $b_j \neq 0$,
$k,j \in \mathbb{N}_0$

Dann gilt (ohne Beweis):

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in O\left(\sum_{i=0}^{j} b_i n^i\right) \quad \Leftrightarrow \quad k \leq j.$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in \Omega\left(\sum_{i=0}^{j} b_i n^i\right) \quad \Leftrightarrow \quad k \geq j.$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in \Theta\left(\sum_{i=0}^{j} b_i n^i\right) \quad \Leftrightarrow \quad k = j.$$

AIFB

©AIFB

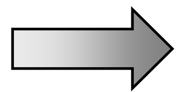
4.3 Komplexität

Bemerkung:

$\Theta(\log_2 n) = \Theta(\log_b n)$, für $b \in IR^+$ bel.

denn: $\log_b n = \log_b 2 * \log_2 n$

$\log_b n = c * \log_2 n$



Für Logarithmen ist die Betrachtung der Basiszahl im Zusammenhang mit Wachstumsklassen irrelevant.

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

AIFB

Welche Operation als Elementaroperationen gesehen werden, hängt vom Anwendungsfall ab.

Beim Entwurf von Schaltkreisen ist die Granularität höher (Bitoperationen als Elementaroperationen) als beim Entwurf von Anwendungssoftware (Addition als Elementaroperation)

Wir einigen uns auf folgende Elementaroperationen:

- Zuweisung
- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
- Vergleich (=, <, >, <=, >=)
- Logisches „oder“
- Logisches „und“

©AIFB

4.3 Komplexität

■ Beispiel **Komplexität des sequentiellen Suchens**

```
ALGORITHMUS seq_suche;
BEGIN
    Eingabe: k_1,..., k_n, k;
                k ∈{k_1,..., k_n };
                Liste ist sortiert.
    i := 0;
    REPEAT
        i := i + 1
    UNTIL (k < k_i) oder (i = n + 1);
    Ausgabe: i
END;
```

Eingabe:

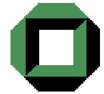
$e ::= (k_1, k_2, ..., k_n, k)$
konkrete Eingabe;
Folge der Länge *n*

Ausgabe:

i ::= i(e), mit $i \in \{1, ..., n + 1\}$

Die REPEAT-Schleife wird *i*-mal durchlaufen, wobei i=Position des Elementes:
außerhalb der Schleife: 1 ELOP,
innerhalb dagegen: 6 ELOPs

⇒ t(seq_Suche; n, e) = 6 i + 1



AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

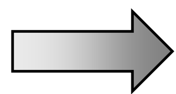
Komplexität:

$T_{min}(seq_suche; n) = 7$

$T_{max}(seq_suche; n) = 6(n + 1) + 1 = 6\,n + 7 \approx 6\,n$

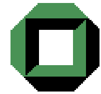
$$T_{avg}(seq_suche; n) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} (6i+1) = 3\,n + 7 \approx 3\,n$$

Annahme für T_{avg}:
Gleichverteilung für die Position von k in der Folge $k_1, k_2, ..., k_n$



Zeitkomplexität im Durchschnitt und im schlechtesten Fall: **O(n)** , d. h. Zeitbedarf hängt linear von *n* ab

©AIFB



AIFB

■ Beispiel

Komplexität des binären Suchens

```
ALGORITHMUS bin_suche;
BEGIN
    Eingabe: k1,..., kn, k;
             k ∈{k1,..., kn };
             Liste ist sortiert.

    Li := 0;
    Re := n + 1;
    WHILE  Li < Re - 1  DO
        M := (Li + Re) DIV 2;
        IF k < kM
            THEN Re := M
            ELSE Li := M
        END (* IF *)
    END (* WHILE *);
    Ausgabe: Re
END;
```

T_{max}(bin_suche, n) $\in O(\log_2 n)$

außerhalb der Schleife 3 ELOPs

Innerhalb der Schleife 7 ELOPs

Schleife wird höchstens

log(n)+2 mal durchlaufen

T_{max}(bin_suche; n) = 7 (log(n)+2)+3

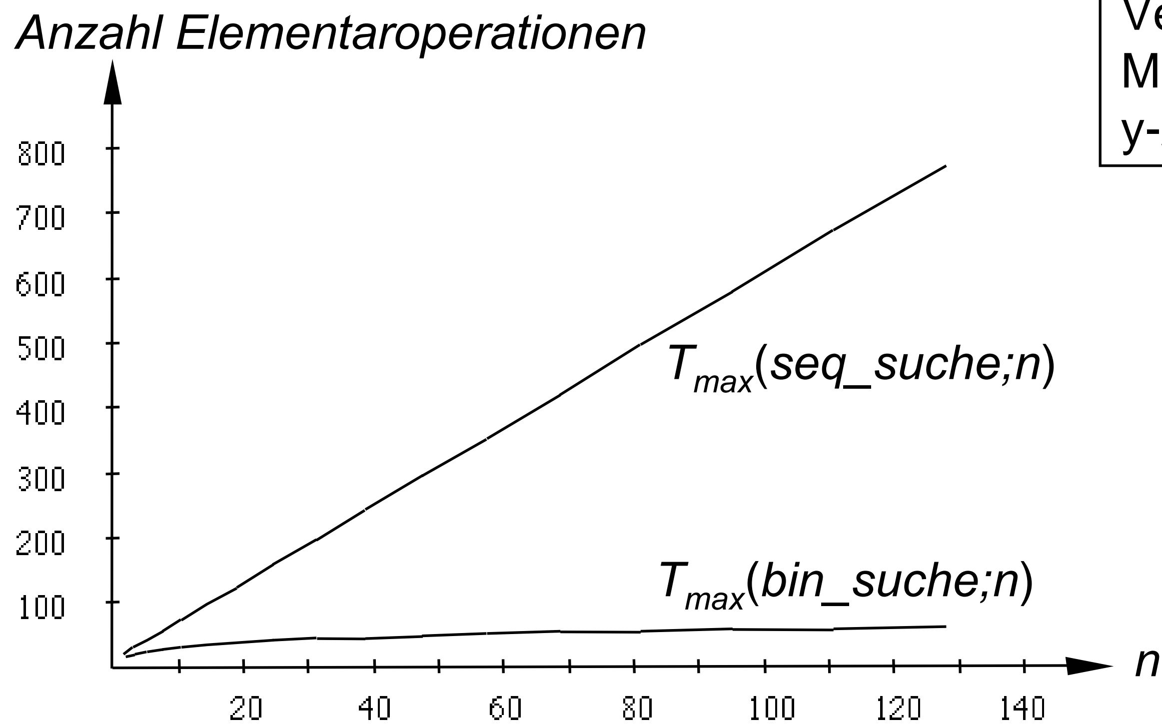
Komplexiät einer If-Anweisung:

T_{max}(IF-Anweisung)= T_{max}(COND)+ max(T_{mac}(THEN-Teil), T_{max}(ELSE-Teil))

©AIFB

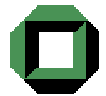
4.3 Komplexität

Vergleich der Komplexität von binärem und sequentiellem Suchen:



Verhältnis der Maßstäbe von x- und y-Achse: 1 : 10

Binäres Suchen effizienter als sequentielles



©AIFB

4.3 Komplexität

n	T_{max}(*bin_suche; n*)	T_{max}(*seq_suche; n*)
2	24	19
4	31	31
8	38	55
16	45	103
32	52	192

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Man unterscheidet verschiedene typische Komplexitäts-funktionen für Algorithmen (***Klassen***):

- ***O*(log$_2$ *n*)**: **Logarithmische Komplexität:**
  Laufzeit des Algorithmus wächst wesentlich schwächer als *n.*
  Verdopplung von *n* bedeutet Anstieg der Laufzeit um additive Konstante $\log_2 2 = 1$

- ***O(n)***: **Lineare Komplexität:**
  Laufzeit des Algorithmus wächst proportional zu *n.*
  Verdopplung von *n* hat (größenordnungsmäßig) Verdopplung der Laufzeit zur Folge.

- ***O*(*n* log$_2$ *n*)**: **Leicht überlineare Komplexität:**
  Laufzeit des Algorithmus wächst etwas stärker als *n.*
  Verdopplung von *n* hat etwas mehr als Verdopplung der Laufzeit zur Folge
  (Genauer: Verdopplung von *n* bedeutet Multiplikation mit dem Faktor $2 + 2 / \log_2(n)$, der für große *n* gegen 2 konvergiert)

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

AIFB

- ***$O(n^2)$***: **Quadratische Komplexität:**
  Laufzeit des Algorithmus wächst wesentlich schneller als *n*.
  Verdopplung von n bewirkt Vervierfachung der Laufzeit.

- ***$O(n^3)$***: **Kubische Komplexität:**
  Verdopplung von *n* bedeutet Verachtfachung der Laufzeit
  (für große *n* nicht akzeptabel).

- ***$O(2^n)$***: **Exponentielle Komplexität:**
  Verdopplung von *n* bedeutet Quadrierung der Laufzeit
  (für große *n* katastrophal).

©AIFB

4.3 Komplexität

Darstellung verschiedener Komplexitätsfunktionen:
→ "grosse" n

2^n

n^3

n^2

$n \log_2 n$

n

$\log_2 n$

750

500

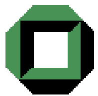
250

50

100

150

vgl. Folie für "kleine" n

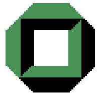


AIFB

©AIFB

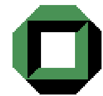
4.3 Komplexität

Darstellung verschiedener Komplexitätsfunktionen:
→ "kleine" n



©AIFB

4.3 Komplexität



©AIFB

Werte verschiedener Komplexitätsfunktionen:

	10	**50**	**100**	**300**	**1000**
$\log_2 n$	3	6	7	8	10
n	10	50	100	300	1000
$n \log_2 n$	33	282	656	2469	9966
n^2	100	2500	10000	90000	10^6
n^3	1000	125000	10^6	*27* * 10^6	10^9
2^n	1024	16-stellige Zahl	31-stellige Zahl	91-stellige Zahl	*302*-stellige Zahl

Zum Vergleich:

Anzahl der Protonen im Weltall: eine ca. 126-stellige Zahl.

4.3 Komplexität

Bemerkungen:

"Groß-Oh-Notation" beschreibt Wachstum von Funktionen für große n, genauer gesagt: das asymptotische Verhalten für $n \to \infty$

Große Problemausprägungen:
• Aussagen mit dieser Notation meist relativ genau zutreffend • Konstante Summanden unwichtig • Höchste Potenz von n bzw. $\log_2 n$ entscheidend

Kleine Problemausprägungen:
• Konstanten Faktoren kommt große Bedeutung zu →Aussagen der Groß-Oh-Notation i. a. sehr unpräzise

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Definition:

Ein Algorithmus heißt **polynomiell**, falls seine (Zeit-)Komplexitätsfunktion ein Polynom ist, d. h. der Form

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

entspricht. Ein solches Polynom gehört zur Klasse $O(n^k)$.

Ein Algorithmus heißt **exponentiell**, falls seine (Zeit-)Komplexitätsfunktion in einer Klasse der Form $O(a^n)$ mit $a > 1$ liegt.

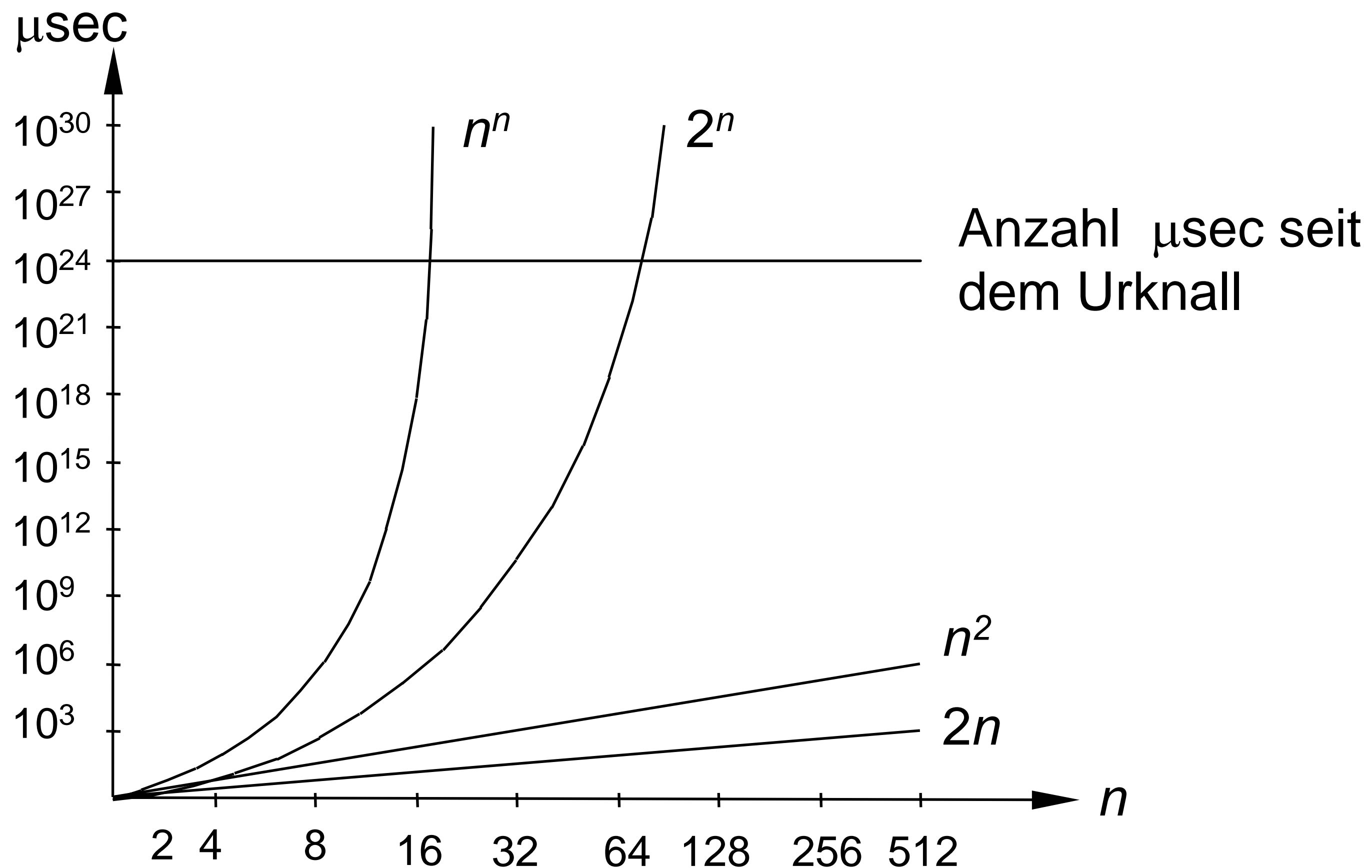
- Polynomielle Algorithmen mit Komplexitätsfunktionen der Klassen $O(n^2)$ und $O(n^3)$ vielleicht für Praxis gerade noch brauchbar.
- Exponentielle Algorithmen allenfalls für kleine Problemausprägungen geeignet, für größere Ausprägungen ungeeignet.

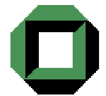
AIFB
©AIFB

4.3 Komplexität

"Zeitverbrauch" in µs bei verschiedenen polynomiellen und exponentiellen Komplexitätsfunktionen:

Prozessor, der 1 µs = 10^{-6} sec pro ELOP benötigt:





AIFB
©AIFB

4.3 Komplexität

Für die exakte Lösung vieler Probleme sind bislang nur exponentielle Algorithmen bekannt:

⇒ Optimales Ergebnis für große Problemausprägungen **nicht** errechenbar.

⇒ Man muss sich mit Näherungsverfahren begnügen.

AIFB

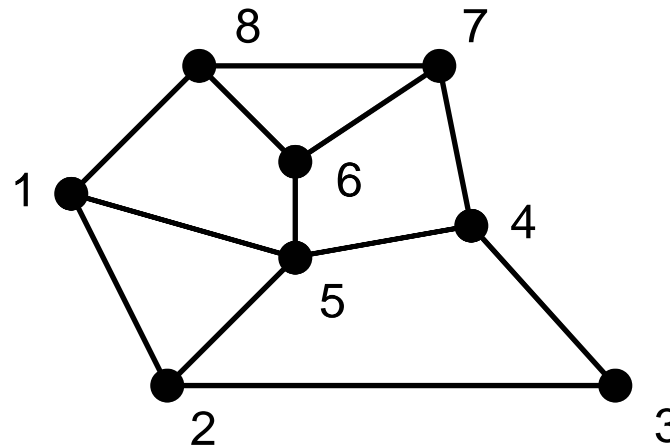
©AIFB

4.3 Komplexität

■ Beispiel **Hamiltonscher Kreis (Hamiltonscher Zyklus)**

Ein Reisender will verschiedene Städte besuchen.
Zwischen einigen dieser Städte gibt es Verkehrsverbindungen.
Der Reisende will sich eine Rundreise durch die Städte derart zurechtlegen, dass jede Stadt exakt einmal bereist wird.
Zum Schluss will er wieder in der Ausgangsstadt ankommen.

Problemausprägung:



Gültige Rundreise für vorliegende Städteverbindung
(Knoten bedeuten Städte, Kanten bedeuten Verkehrsverbindungen):
z.B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1

AIFB
©AIFB

4.3 Komplexität

Problemspezifikation (allgemein)**:**

Eingabe:

Ein ungerichteter Graph *G* bestehend aus einer nichtleeren, endlichen Knotenmenge *E* und einer Kantenmenge *K*:

$G = (E, K)$

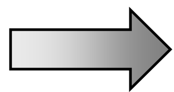
$E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $K \subseteq E \times E$, symmetrisch.

Ausgabe:

"Ja", falls es eine Folge $F = e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in}$ gibt, für die gilt:

(i) Jeder Knoten ist genau einmal enthalten.

(ii) $(e_{i1},e_{i2}), (e_{i2},e_{i3}), ...,(e_{in-1},e_{in}), (e_{in},e_{i1}) \in K$



Folge *F* in einem Graphen, die obiger Spezifikation entspricht, heißt auch ***Hamiltonscher Kreis (Zyklus)***.

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

Folgender grobe und naive Algorithmus stellt fest, ob ein Graph einen derartigen Kreis enthält:

```
ALGORITHMUS HZ;
BEGIN
    Eingabe: E, K; (* n ::= Anzahl der Knoten *)
    gefunden := false;
    REPEAT
            "Berechne Permutation e_i1, e_i2, ..., e_in der Knoten";
            IF {(e_i1,e_i2),(e_i2,e_i3) ...,(e_in,e_i1)} ⊆ K"
                THEN gefunden := TRUE;
                Ausgabe: ja
            END (* IF *)
    UNTIL gefunden oder "alle Permutationen ausprobiert";
END.
```

AIFB

©AIFB

4.3 Komplexität

- Da es zu einer Folge der Länge *n* genau *n*! Permutationen gibt, ist $T_{max}(HZ; n) \in O(n!)$

- Nach heutigem Kenntnisstand:
  Algorithmus lässt sich nur unwesentlich verbessern,
  d. h. bislang ist kein Algorithmus bekannt, der jeden Hamiltonschen Kreis in einem Graph findet und dabei mit polynomiellem Zeitaufwand auskommt.

AIFB

©AIFB